



Étude numérique d'un problème de solidification d'un alliage

A. Bermudez, Ch. Saguez

► To cite this version:

A. Bermudez, Ch. Saguez. Étude numérique d'un problème de solidification d'un alliage. RR-0104, INRIA. 1981. inria-00076456

HAL Id: inria-00076456

<https://hal.inria.fr/inria-00076456>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
91800 Brunoy Cedex
France
Tél. 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 104

ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME DE SOLIDIFICATION D'UN ALLIAGE

Alfredo BERMUDEZ
Christian SAGUEZ

Décembre 1981

ETUDE NUMERIQUE D'UN PROBLEME DE SOLIDIFICATION D'UN ALLIAGE

A. BERMUDEZ^{**} - C. SAGUEZ^{*}

Résumé :

Nous présentons une méthode numérique de résolution d'un problème de solidification d'un alliage. Le problème discrétisé en t est transformé en un système d'inéquations quasi-variationnelles pour lequel nous montrons l'existence de solutions minimale et maximale ainsi que la convergence de l'algorithme. Des résultats numériques sont présentés.

Abstract :

In this paper, the problem of the solidification of a binary alloy is considered from a numerical point of view. We transform the problem discretized in time in a system of quasi-variational inequalities. For this system, the existence of a minimal and maximal solution is obtained. We deduce a numerical algorithm, the convergence of which is proved. Numerical results are presented.

*INRIA - Domaine de Voluceau - 78153 LE CHESNAY - France

**Université de Santiago de Compostela - Espagne

Ce travail a été en partie supporté par le service scientifique de l'Ambassade de France en Espagne.

Dans cet article nous étudions, d'un point de vue numérique, la solidification d'un alliage avec deux composants. Ce problème diffère de la solidification d'un corps pur (problème de Stefan classique), dans le modèle considéré, par les points suivants:

- Il s'agit d'un système couplé (température-concentration d'un des composants) de deux équations de diffusion.

- La température de solidification est une inconnue, dépendant de la concentration.

- La concentration subit une discontinuité le long de l'interphase liquide-solide.

Le système reprend le modèle étudié dans A.B.Crowley-J.R.Ockendon [6], G.J.Fix [9], où différentes méthodes numériques sont également proposées.

Dans la première partie, en introduisant la variable $w = \frac{c}{\sigma}$ (c concentration, $\frac{1}{\sigma}$ pentes des droites du solidus et du liquidus dans le diagramme de changement de phase), on obtient une formulation du type formulation enthalpie pour le problème de Stefan où, ici, les graphes maximaux monotones associés sont dépendants de la solution du problème.

Dans la deuxième partie nous étudions un système asso-

cié semi-discrétisé en temps. Ce système est du type inéquations quasi-variationnelles (dans le problème de Stefan la même approche donne une structure d'inéquation variationnelle). Nous démontrons alors l'existence d'une solution pour ce système par une méthode constructive, utilisant les principes de monotonie (J.L.Lions [12], L.Tartar [14]).

Dans la troisième partie nous appliquons cette méthode pour la simulation numérique du problème étudié. Différents résultats numériques sont présentés.

Le plan de l'article est le suivant:

I.- Problème modèle et formulation mathématique.

I.1.- Le problème.

I.2.- Une formulation type enthalpie.

II.- Etude d'un problème discrétisé en temps.

II.1.- Problème discrétisé.

II.2.- Existence d'une solution.

III.- Méthode numérique.

III.1.- Algorithme de résolution.

III.2.- Résultats numériques.

I.- Problème modèle et formulation mathématique.

I.1.- Le problème.

On reprend ici une formulation présentée dans G.J.Fix [9]. On considère dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N ($N \leq 3$), le problème de la solidification d'un alliage ayant deux composants. On note $\Omega_1(t)$ la zone liquide à l'instant t , $\Omega_2(t)$ la zone solide et $S(t)$ la frontière libre, front de séparation entre la phase liquide et la phase solide ($\Omega = \Omega_1(t) \cup S(t) \cup \Omega_2(t)$).

$\theta_i(x,t)$ (resp. $c_i(x,t)$) représente la température (resp. la concentration d'un des composants) dans le domaine $\Omega_i(t)$ ($i=1,2$). On note:

$$\begin{aligned}\theta(x,t) &= \theta_i(x,t) && \text{dans } \Omega_i(t) \\ c(x,t) &= c_i(x,t) && \text{dans } \Omega_i(t).\end{aligned}$$

$\theta_i(x,t)$ et $c_i(x,t)$ vérifient les équations suivantes:

$$(1.1) \quad \rho k \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \operatorname{div} (\alpha_i \operatorname{grad} \theta_i) = 0 \quad \text{dans } \bigcup_t (\Omega_i(t) \times \{t\}); \quad i=1,2$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial c_i}{\partial t} - \operatorname{div} (\beta_i \operatorname{grad} c_i) = 0 \quad \text{dans } \bigcup_t (\Omega_i(t) \times \{t\}); \quad i=1,2$$

avec $\alpha_i > 0$ conductivité thermique
 $\beta_i > 0$ coefficient de diffusion de masse
 $\rho > 0$ densité du corps
 $k > 0$ capacité calorifique

Remarque 1.1.- On peut considérer de la même façon par la suite, le cas où ρ et k dépendent de la température.

Sur la frontière libre, on a les conditions:

$$(1.3) \quad (\alpha_1 \overrightarrow{\text{grad } \theta_1} - \alpha_2 \overrightarrow{\text{grad } \theta_2}) \cdot \vec{n} = -\rho L \vec{V} \cdot \vec{n}$$

$$(1.4) \quad (\beta_1 \overrightarrow{\text{grad } c_1} - \beta_2 \overrightarrow{\text{grad } c_2}) \cdot \vec{n} = -(c_1 - c_2)|_{S(t)} \vec{V} \cdot \vec{n}$$

$$(1.5) \quad \theta_1 = \theta_2|_{S(t)}$$

$$(1.6) \quad c_1 = \sigma_1 \theta_1|_{S(t)}$$

$$(1.7) \quad c_2 = \sigma_2 \theta_2|_{S(t)}$$

avec L chaleur latente de changement de phase

$\vec{V} \cdot \vec{n}$ vitesse normale de déplacement du front de solidification

σ_1, σ_2 constantes négatives ($\sigma_1 \leq \sigma_2$) intervenant dans le diagramme de changement de phase ci-dessous (figure 1.1)

Si on suppose que la température de solidification du corps pur ($c=0$) est 0°C , on a le diagramme de changement de phase:

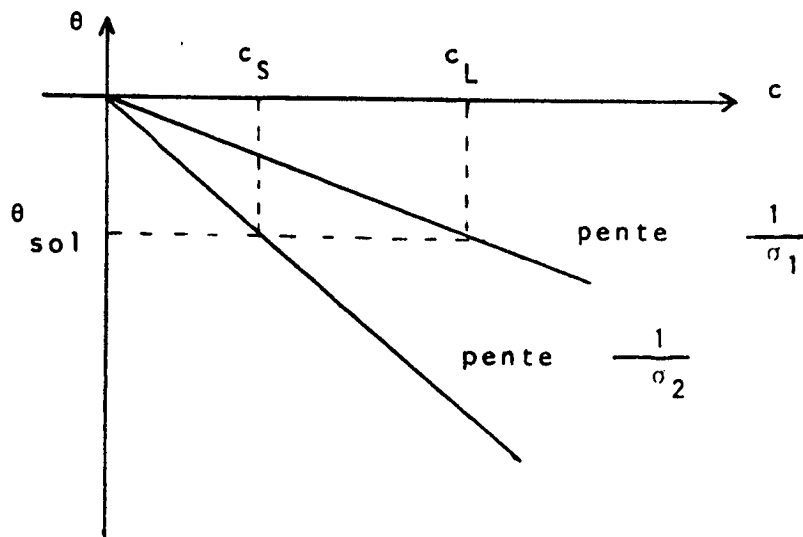


Figure 1.1.- Diagramme de changement de phase.

Ainsi si on refroidit le corps liquide avec une concentration c_L , la solidification se produit à la température

θ_{sol} . Dans la phase solide, la concentration est c_S . On a donc à l'interphase une discontinuité de la concentration entre le solide et le liquide.

Remarque 1.2.- On peut traiter de façon analogue, le cas où la température de solidification du corps pur est θ_d différente de zéro.

Les conditions aux bords sont données par:

$$(1.8) \quad \alpha \frac{\partial \theta}{\partial n} = q \quad \text{sur } \Sigma = \partial \Omega \times]0, T[$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

où q est une fonction donnée de $L^2(\Sigma)$.

Enfin on a les données initiales:

$$(1.10) \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x); \quad c(x, 0) = c_0(x).$$

1.2.- Une formulation type enthalpie

On introduit la nouvelle inconnue :

$$(1.11) \quad w_i(x, t) = \frac{c_i(x, t)}{\sigma_i} \quad \text{dans } \Omega_i(t)$$

de telle sorte que $w(x, t)$, contrairement à $c(x, t)$, est maintenant une variable continue au front de solidification.

L'interphase liquide-solide à l'instant t est alors caractérisée par l'ensemble des points x tels que

$\theta(x,t) = w(x,t)$. On a également:

$$\Omega_1(t) = \{x | \theta(x,t) > w(x,t)\}$$

$$\Omega_2(t) = \{x | \theta(x,t) < w(x,t)\}.$$

$w_i(x,t)$ vérifie le système:

$$(1.12) \quad \sigma_i \frac{\partial w_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma_i \beta_i \operatorname{grad} w_i) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i(t)$$

$$(1.13) \quad w_1 = w_2|_{S(t)}$$

$$(1.14) \quad (\sigma_1 \beta_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_1} - \sigma_2 \beta_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_2}) \cdot \vec{n} = (\sigma_1 - \sigma_2) w|_{S(t)} \vec{V} \cdot \vec{n}$$

Au sens des distributions les équations (1.1), (1.2) (1.7) s'écrivent:

$$(1.15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \theta) = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$(1.16) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} w) = 0 \quad \text{dans } Q$$

$$(1.17) \quad u \in H_w(\theta); \quad v \in G_\theta(w)$$

avec

$$\alpha(\theta, w) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } \theta \geq w \\ \alpha_2 & \text{si } \theta < w \end{cases}$$

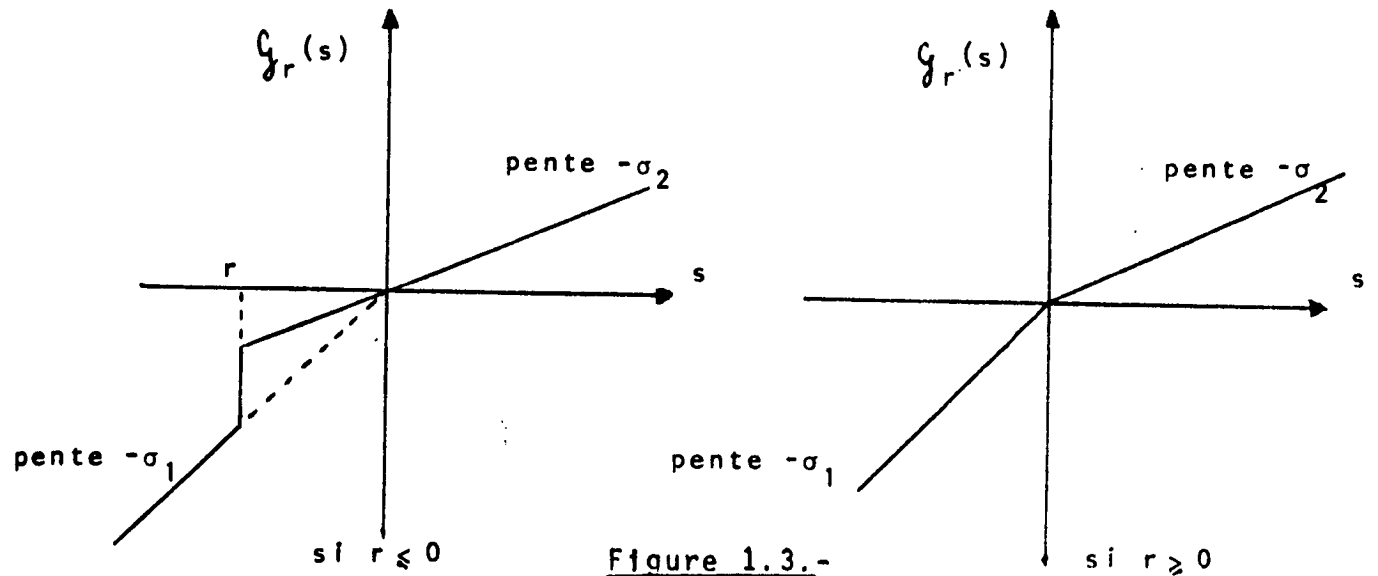
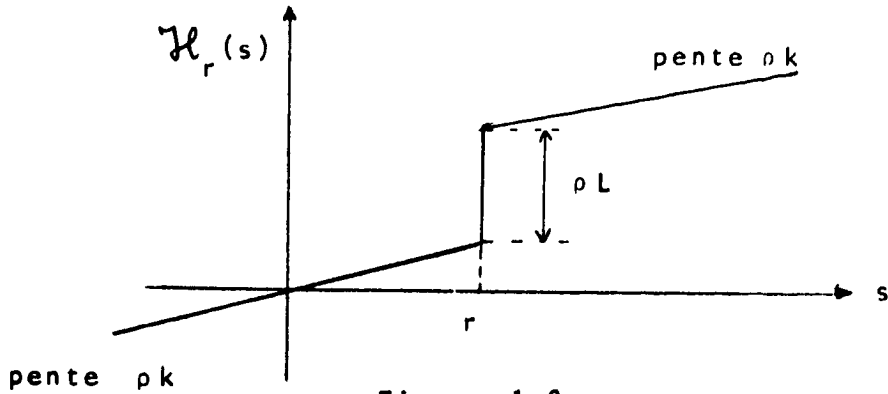
$$\gamma(w, \theta) = \begin{cases} -\sigma_1 \beta_1 & \text{si } \theta \geq w \\ -\sigma_2 \beta_2 & \text{si } \theta < w \end{cases}$$

et où $H_w(\theta)$ et $G_\theta(w)$ sont définis de la manière suivante, pour w et θ appartenant à $L^2(\Omega)$:

$$H_w(\theta) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u(x) \in \mathcal{H}_{w(x)}(\theta(x))\}$$

$$G_\theta(w) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \in \mathcal{G}_{\theta(x)}(w(x))\}$$

avec $\mathcal{H}_r(s)$ et $\mathcal{G}_r(s)$ de graphes:

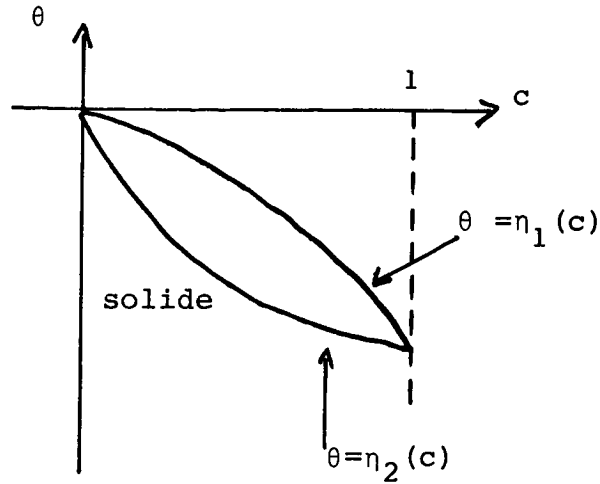


On a donc des graphes correspondants à des opérateurs maximaux monotones.

On peut, de plus remarquer de suite que $v(x,t)$ correspond à $-c(x,t)$.

Remarque 1.3.-

L'étude présentée ici se généralise au cas d'un diagramme de changement de phase général de la forme :



On suppose que η_i vérifie :

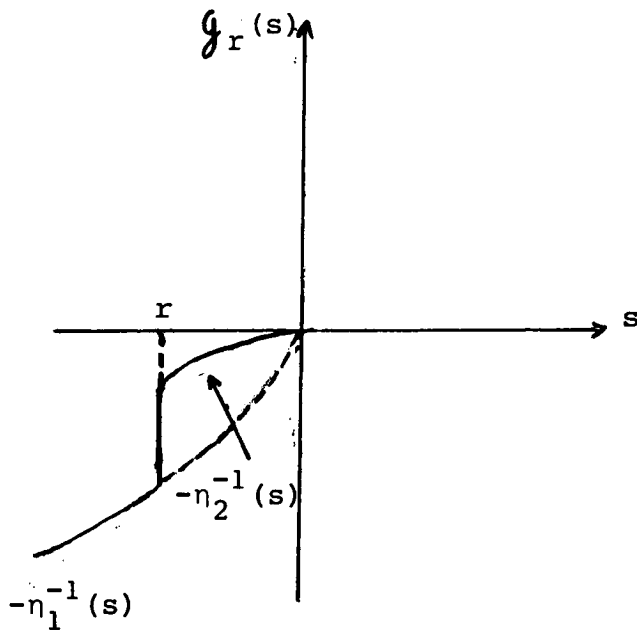
$$\begin{cases} \eta_i \in C^1(\mathbb{R}) \\ \exists \alpha, \beta : \beta \leq \eta_i'(x) \leq \alpha < 0 \end{cases}$$

On pose alors $w_i = \eta_i(c_i)$ dans $\Omega_i(t)$

On obtient pour w l'équation (1.16) avec

$$\gamma = \begin{cases} -\frac{\beta_1}{\eta_1'(\eta_1^{-1}(w))} & \text{si } \theta \geq w \\ -\frac{\beta_2}{\eta_2'(\eta_2^{-1}(w))} & \text{si } \theta < w \end{cases}$$

et $g_r(s)$ donné par le graphe :



Démontrons (1.15)-(1.16) :

On a si $u \in H_w(\theta)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$.

$$A = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \theta), \varphi \right\rangle_Q = - \int_Q u \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_Q \alpha \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} \varphi dx dt$$

$$A = - \int_{Q_1} u \frac{d\varphi}{dt} dx dt - \int_{Q_2} u \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_{Q_1 \cup Q_2} \alpha \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} \varphi dx dt$$

$$\text{avec } Q_i = \bigcup_t (\Omega_i(t) \times \{t\}) \quad (i=1,2).$$

En notant $S = \{(x, t) \mid \theta(x, t) = w(x, t)\}$, on obtient:

$$\begin{aligned} A = & \int_{Q_1} \rho k \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \varphi dx dt - \int_S (\rho k \theta_1 + \rho L) \varphi N_t d\Sigma + \int_{Q_2} \rho k \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \varphi dx dt + \\ & + \int_S \rho k_2 \theta_2 \varphi N_t d\Sigma - \int_{Q_1} \operatorname{div}(\alpha_1 \operatorname{grad} \theta_1) \varphi dx dt + \int_S \alpha_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_1} \cdot \vec{N}_x \varphi \\ & - \int_{Q_2} \operatorname{div}(\alpha_2 \operatorname{grad} \theta_2) \varphi dx dt - \int_S \alpha_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_2} \cdot \vec{N}_x \varphi d\Sigma. \end{aligned}$$

D'après (1.1) on obtient:

$$A = - \int_S (\rho k \theta_1 - \rho k \theta_2 + \rho L) N_t \varphi d\Sigma + \int_S (\alpha_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_1} - \alpha_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_2}) \cdot \vec{N}_x \varphi d\Sigma$$

Or comme $\vec{V} \cdot \vec{N}_x = -\vec{N}_t$, on en déduit, avec (1.5):

$$A = \int_S (\rho L \vec{V} \cdot \vec{N}_x + (\alpha_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_1} - \alpha_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta_2}) \cdot \vec{N}_x) \varphi d\Sigma = 0 \text{ d'après (1.3),}$$

ce qui démontre (1.15).

De même pour (1.16) on a, avec $v \in G(w)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$:

$$B = \left\langle \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} w), \varphi \right\rangle_Q = - \int_Q v \cdot \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_Q \gamma \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} \varphi dx dt.$$

$$B = - \int_{Q_1 \cup Q_2} v \frac{d\varphi}{dt} dx dt + \int_{Q_1 \cup Q_2} \gamma \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} \varphi dx dt$$

$$B = \int_{Q_1} -\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} \varphi dx dt - \int_S (-\sigma_1 w_1) \varphi N_t d\Sigma + \int_{Q_2} -\sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \varphi dx dt + \int_S (-\sigma_2 w_2) \varphi N_t d\Sigma$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_1} \operatorname{div}(-\sigma_1 \beta_1 \operatorname{grad} w_1) \varphi \, dx \, dt + \int_S (-\sigma_1 \beta_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_1}) \cdot \vec{N}_x \varphi \, d\Sigma \\
& - \int_{Q_2} \operatorname{div}(-\sigma_2 \beta_2 \operatorname{grad} w_2) \varphi \, dx \, dt - \int_S (-\sigma_2 \beta_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_2}) \cdot \vec{N}_x \varphi \, d\Sigma .
\end{aligned}$$

Grâce à (1.2), on a:

$$B = \int_S -(-\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2) N_t \varphi \, d\Sigma + \int_S (-\sigma_1 \beta_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_1} + \sigma_2 \beta_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_2}) \cdot \vec{N}_x \varphi \, d\Sigma$$

Soit,

$$B = \int_S \{ -(\sigma_1 - \sigma_2) w \vec{V} \cdot \vec{N}_x + (-\sigma_1 \beta_1 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_1} + \sigma_2 \beta_2 \overrightarrow{\operatorname{grad} w_2}) \cdot \vec{N}_x \} \varphi \, d\Sigma$$

et donc d'après (1.14) $B=0$, ce qui démontre (1.16).

On a les conditions aux bords (1.8)-(1.9) et les conditions initiales:

$$(1.18) \quad u(x,0) = u_0(x) \in H_{w_0}(\theta_0)$$

$$(1.19) \quad v(x,0) = v_0(x) = -c_0(x) \in G_{\theta_0}(w_0)$$

Remarque 1.4.-

Le calcul précédent a été effectué en supposant que la frontière $\{(x,t) \mid \theta(x,t) = w(x,t)\}$ était régulière. Dans ce cas le système (1.15)-(1.17) peut s'interpréter comme (1.1)-(1.7).

Cependant le système (1.15)-(1.17) reste valable si $\mathcal{M}\{(x,t) \mid \theta(x,t) = w(x,t)\} \neq 0$. Dans ce cas, une solution du système peut s'interpréter comme suit :

Soit un élément de volume de l'ensemble
 $\{(x,t) \mid \theta(x,t) = w(x,t)\}$. Cet élément contient
 une partie liquide et une partie solide en équilibre. Soit
 c_1 (resp. c_2) la concentration de la partie liquide (resp. solide)
 D'après le diagramme de changement de phase (fig. 1.1) on a :

$$(*) \quad w = \theta = \frac{c_1}{\sigma_1} = \frac{c_2}{\sigma_2}$$

Soit f la fraction liquide et $\bar{c}(x,t)$ la concentration moyenne
 de cet élément, c'est-à-dire :

$$\bar{c}(x,t) = f(x,t) c_1(x,t) + (1-f)c_2(x,t).$$

Alors pour \bar{c} , on a l'équation :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} - \text{div} (f\beta_1 \text{grad } c_1 + (1-f)\beta_2 \text{grad } c_2) = 0$$

et d'après (*)

$$\frac{\partial}{\partial t} ((-f\sigma_1 - (1-f)\sigma_2)w) - \text{div}(\gamma \text{grad } w) = 0$$

$$\text{avec} \quad \gamma = -f\beta_1\sigma_1 - (1-f)\beta_2\sigma_2 > 0 \quad (**)$$

or comme $w = \theta$ et $0 \leq f \leq 1$, on a :

$$(-f\sigma_1 - (1-f)\sigma_2) w \in G_\theta(w)$$

Alors en posant $v = (-f\sigma_1 - (1-f)\sigma_2)w$, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \text{div}(\gamma \text{grad } w) = 0 ; \quad v \in G_\theta(w)$$

ce qui correspond à (1.16) avec γ définie en (**).

Dans la zone solide on a $f=0$ et dans la zone liquide $f=1$. On retrouve alors dans Ω le système (1.15)-(1.16) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \theta) = 0 \quad ; \quad u \in H_w(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} w) = 0 \quad ; \quad v \in G_\theta(w)$$

avec γ définie comme ci-dessus et :

$$\alpha = f\alpha_1 + (1-f)\alpha_2$$

$$f = \frac{u - \rho k \theta}{\rho L}$$

Soit $V = H^1(\Omega)$ et V' le dual.

On introduit les opérateurs suivants:

$$(1.20) \quad (A(\theta, w), z)_{V', V} = \int_{\Omega} \alpha(\theta, w) \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} z \, d\Omega.$$

$$(1.21) \quad (B(w, \theta), z)_{V', V} = \int_{\Omega} \gamma(w, \theta) \operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} z \, d\Omega.$$

et on définit $h \in L^2(0, T, V')$ par:

$$(h(t), z)_{V', V} = \int_{\partial\Omega} g(t) z \, d\Gamma.$$

On a alors la formulation globale:

$$(1.22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + A(\theta, w) = h \quad ; \quad u \in H_w(\theta)$$

$$(1.23) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + B(w, \theta) = 0 \quad ; \quad v \in G_\theta(w)$$

$$(1.24) \quad u(x, 0) = u_0(x) \in H_{w_0}(\theta_0); \quad v(x, 0) = v_0(x) \in G_{\theta_0}(w_0)$$

II.- Etude d'un problème discrétisé en temps.

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'existence d'une solution sur un problème semi-discrétisé en t associé à un problème du type (1.22)-(1.24). Pour cela nous utilisons les méthodes développées pour les inéquations quasi-variationnelles. Nous donnons une méthode constructive qui sera utilisée dans la mise en oeuvre numérique au paragraphe III.

II.1.- Le problème discrétisé.

Soit le problème semi-discretisé en t suivant:

$$\Delta t = \frac{T}{N_T} \quad , \quad (N_T \text{ entier donné})$$

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A^n_{\theta^{n+1}} = h^{n+1}; \quad u^{n+1} \in H_{w^{n+1}}(\theta^{n+1}) \end{array} \right.$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + B^n_{w^{n+1}} = 0 \quad ; \quad v^{n+1} \in G_{\theta^{n+1}}(w^{n+1}) \quad n = 0, \dots, N_T - 1 \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^0 = u_0(x) \in H_{w^0}(\theta^0); \quad v^0 = v_0(x) \in G_{\theta^0}(w^0); \quad \theta^0 = \theta_0(x) \end{array} \right.$$

avec A^n , B^n et h^{n+1} définis par:

$$(2.4) \quad (A^n_{\theta,z})_{V',V} = \int_{\Omega} \alpha(\theta^n, w^n) \text{grad } \theta \text{ grad } z \cdot d\Omega = a^n(\theta, z)$$

$$(2.5) \quad (B^n_{w,z})_{V',V} = \int_{\Omega} \gamma(w^n, \theta^n) \text{grad } w \text{ grad } z \cdot d\Omega = b^n(w, z)$$

$$(2.6) \quad h^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} h(\tau) d\tau.$$

Remarque 2.1-

Dans le cas du système introduit à la remarque (1.4) on retrouve un système semi-discrétisé analogue à (2.1)-(2.3) en remplaçant :

$$\alpha(\theta^n, w^n) \quad \text{par} \quad \alpha^n = f^n \alpha_1 + (1-f^n) \alpha_2$$

$$\gamma(w^n, \theta^n) \quad \text{par} \quad \gamma^n = -f^n \beta_1 \sigma_1 - (1-f^n) \beta_2 \sigma_2.$$

$$\text{avec} \quad f^n = \chi\left(\frac{u^n - \rho k \theta^n}{\rho L}\right)$$

$$\text{et} \quad \chi(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq 0 \\ v & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \\ 1 & \text{si } v \geq 1 \end{cases}$$

II.2.- Existence d'une solution.

Nous allons démontrer l'existence d'une solution $\{(\theta^{n+1}, u^{n+1}), (w^{n+1}, v^{n+1})\}$ au système (2.1)-(2.2) pour $\{(\theta^n, u^n), (w^n, v^n)\}$ fixés, en nous plaçant dans le cadre d'hypothèses plus générales, qui seront bien sûr, vérifiées pour le cas particulier du problème du paragraphe I.

On suppose que $\mathcal{H}_r(s)$ et $\mathcal{G}_r(s)$ définissent pour r fixé des graphes maximaux monotones de \mathbb{R} dans \mathbb{R} avec $0 \in \mathcal{H}_r(0)$ et $0 \in \mathcal{G}_r(0)$. Alors il existe deux fonctions convexes, continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , notées respectivement $\psi_r(s)$ et $\varphi_r(s)$, telles que

$$(2.7) \quad \begin{cases} \partial \psi_r(s) = \mathcal{H}_r(s) \times \frac{1}{\Delta t} \\ \partial \varphi_r(s) = \mathcal{G}_r(s) \times \frac{1}{\Delta t} \end{cases} \quad \text{avec } \psi_r(0) = \varphi_r(0) = 0$$

On définit alors pour v donné dans $L^2(\Omega)$, les fonctionnelles $\Psi_v(.)$ et $\Phi_v(.)$ de $L^2(\Omega)$ dans $(-\infty, \infty]$ par:

$$(2.8) \quad \Psi_v(z) = \int_{\Omega} \psi_{v(x)}(z(x)) d\Omega$$

$$\Phi_v(z) = \int_{\Omega} \varphi_{v(x)}(z(x)) d\Omega$$

D'après I. Ekeland-R. Teman [8], $\Phi_v(.)$ et $\Psi_v(.)$ sont s.c.i.

En omettant les indices n , le problème (2.1)-(2.2) peut s'écrire:

Trouver $(\theta, w) \in \{H^1(\Omega)\}^2$ tel que:

$$(2.9) \quad a(\theta, z-\theta) + \Psi_w(z) - \Psi_w(\theta) \geq (f, z-\theta) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

$$(2.10) \quad b(w, z-w) + \Phi_{\theta}(z) - \Phi_{\theta}(w) \geq (g, z-w) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

avec $f = h^{n+1} + \frac{u^n}{\Delta t}$; $g = \frac{v^n}{\Delta t}$.

Le système (2.9)-(2.10) est en fait une inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.), puisque Ψ et Φ dépendent de la solution (θ, w) . Ici apparaît la différence avec le problème de Stefan à deux phases (solidification d'un corps pur) où nous avons une inéquation variationnelle.

Pour démontrer l'existence d'une solution au problème (2.9)-(2.10), nous utilisons, comme pour certaines I.Q.V., une technique de monotonie (J.L. Lions [12], L. Tartar [14]). Nous faisons les hypothèses suivantes:

(H1) Les familles $\{\mathcal{H}_r(s)\}$ et $\{\mathcal{G}_r(s)\}$ vérifient l'hypothèse de décroissance:

$$\text{si } r_1 \leq r_2 \quad \forall p_1 \in \mathcal{H}_{r_1}(s) \quad \exists p_2 \in \mathcal{H}_{r_2}(s) \text{ tel que } p_1 \geq p_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{si } r_1 \leq r_2 \quad \forall q_1 \in \mathcal{G}_{r_1}(s), \quad q_2 \in \mathcal{G}_{r_2}(s) \text{ tel que } q_1 \geq q_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

(H2) Il existe m_1, m_2 constantes positives telles que:

$$\forall p_1 \in \mathcal{H}_r(s_1), \quad \forall p_2 \in \mathcal{H}_r(s_2) \quad (p_1 - p_2, s_1 - s_2) \geq m_1 (s_1 - s_2)^2 \\ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

$$\forall q_1 \in \mathcal{G}_r(s_1), \quad \forall q_2 \in \mathcal{G}_r(s_2) \quad (q_1 - q_2, s_1 - s_2) \geq m_2 (s_1 - s_2)^2 \\ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe des constantes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ ($\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0$) telles que:

$$\forall p \in \mathcal{H}_r(s), \quad |p| \leq \mu_1 |s| + \mu_2 |r| + \mu_3$$

$$\forall q \in \mathcal{G}_r(s), \quad |q| \leq \nu_1 |s| + \nu_2 |r| + \nu_3$$

(H4) Il existe deux fonctions continues monotones croissantes

\underline{g} et \bar{g} indépendantes de r , telles que:

$$\forall p \in \mathcal{G}_r(s), \quad \underline{g}(s) \leq p \leq \bar{g}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

avec

$$|\underline{g}(s)| \leq l_1 |s| + l_2$$

$$|\bar{g}(s)| \leq l_3 |s| + l_4$$

(H5) $\psi_r(s)$ et $\varphi_r(s)$ dépendent continument de r .

(H6) Il existe des constantes positives $\delta_1, \delta_2, \eta_1, \eta_2$ telles que:

$$a(z, z) + \delta_2 \|z\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta_1 \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

$$b(z, z) + \eta_2 \|z\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \eta_1 \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Alors à partir des hypothèses précédentes, on obtient:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \text{si } w_1 \leq w_2 \quad (w_i \in L^2(\Omega)) \text{ alors } \psi_{w_2}(z) \leq \psi_{w_1}(z) & \forall z \in L^2(\Omega) \\ \text{si } \theta_1 \leq \theta_2 \quad (\theta_i \in L^2(\Omega)) \text{ alors } \phi_{\theta_2}(z) \leq \phi_{\theta_1}(z) & \forall z \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \forall p_1 \in H_w(\theta_1), \forall p_2 \in H_w(\theta_2) \quad (p_1 - p_2, (\theta_1 - \theta_2)^+) \geq m_1 \|(\theta_1 - \theta_2)^+\|_{L^2}^2 \\ \forall q_1 \in G_\theta(w_1), \forall q_2 \in G_\theta(w_2) \quad (q_1 - q_2, (w_1 - w_2)^+) \geq m_2 \|(w_1 - w_2)^+\|_{L^2}^2 \end{cases}$$

Il existe $K_1 > 0, K_2 > 0$ tels que:

$$(2.13) \quad \begin{cases} a(z, z) + \psi_w(z) \geq K_1 \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 & \forall z \in H^1(\Omega) \\ b(z, z) + \phi_\theta(z) \geq K_2 \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 & \forall z \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} \text{si } w_1 \leq w_2 \quad (w_i \in L^2(\Omega)), \forall p_1 \in H_{w_1}(z), \exists p_2 \in H_{w_2}(z) \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad p_1 \geq p_2, \quad \forall z \in L^2(\Omega) \\ \text{si } \theta_1 \leq \theta_2 \quad (\theta_i \in L^2(\Omega)), \forall q_1 \in G_{\theta_1}(z), \exists q_2 \in G_{\theta_2}(z) \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad q_1 \geq q_2, \quad \forall z \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

$$(2.15) \quad H_w(.) \text{ et } G_\theta(.) \text{ transforment les bornés de } L^2(\Omega) \text{ en bornés de } L^2(\Omega).$$

Remarque 2.2.- On vérifie que les hypothèses (H1)-(H6) sont vérifiées pour le problème de l'alliage présenté au paragraphe 1.

On a alors la proposition:

Proposition 2.1.- Sous les hypothèses (H1)-(H6), le problème (2.9)-(2.10) admet une solution minimale et une solution maximale.

Démonstration: Nous supposons les lemmes suivantes (dont la démonstration est donnée par la suite).

Lemme 2.1.- Pour w (resp. θ) fixé dans $L^2(\Omega)$, l'inéquation variationnelle (2.9) (resp. 2.10) admet une solution unique θ (resp. w) telle que $f - A\theta \in L^2(\Omega)$ (resp. $g - Bw \in L^2(\Omega)$).

On définit les applications de $L^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

$T_1: w \longrightarrow \theta$ solution de l'inéquation variationnelle (2.9)

$T_2: \theta \longrightarrow w$ solution de l'inéquation variationnelle (2.10)

Lemme 2.2.- Sous l'hypothèse (H1), T_1 et T_2 sont des applications croissantes, soit:

$$w_1 \leq w_2 \implies T_1 w_1 \leq T_1 w_2$$

$$\theta_1 \leq \theta_2 \implies T_2 \theta_1 \leq T_2 \theta_2$$

Lemme 2.3.- Il existe, sous les hypothèses précédentes, des fonctions \underline{w} et \bar{w} telles que:

$$\forall \theta \in L^2(\Omega) \quad \underline{w} \leq T_2 \theta \leq \bar{w} \quad \text{p.p.}$$

On définit les suites $\{w_j\}$ et $\{\theta_j\}$ comme suit:

$$w_0 = \underline{w} \quad ; \quad \theta_0 = T_1 \underline{w} = \underline{\theta}$$

$$w_{j+1} = T_2 \theta_j \quad ; \quad \theta_{j+1} = T_1 w_{j+1}$$

On a d'après les lemmes 2.2 et 2.3.:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \underline{w} \leq w_1 \leq \dots \leq w_j \leq w_{j+1} \leq \dots \leq \bar{w} \\ \underline{\theta} \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_j \leq \theta_{j+1} \leq \dots \leq \bar{\theta} = T_1 \bar{w} \end{cases}$$

Montrons que $\{w_j\}$ et $\{\theta_j\}$ sont bornés dans $H^1(\Omega)$. On a:

$$(2.17) \quad a(\theta_j, z - \theta_j) + \psi_{w_j}(z) - \psi_{w_j}(\theta_j) \geq (f, z - \theta_j) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

$$(2.18) \quad b(w_{j+1}, z - w_{j+1}) + \phi_{\theta_j}(z) - \phi_{\theta_j}(w_{j+1}) \geq (g, z - w_{j+1}) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

Si on prend $z \equiv 0$ dans (2.17), on obtient:

$$a(\theta_j, \theta_j) + \psi_{w_j}(\theta_j) \leq (f, \theta_j)$$

D'après (2.13), on déduit:

$$K_1 ||\theta_j||_{H^1(\Omega)}^2 \leq (f, \theta_j)$$

Donc

$$(2.19) \quad ||\theta_j||_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \quad \text{indépendant de } j.$$

De même si on prend $z \equiv 0$ dans (2.18), on obtient

$$(2.20) \quad ||w_{j+1}||_{H^1(\Omega)}^2 \leq c.$$

De (2.16), (2.17), (2.18) on déduit la convergence des suites $\{w_j\}$, $\{\theta_j\}$ au sens suivant:

$$\theta_j \longrightarrow \tilde{\theta} \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible, } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p.x}$$

$$w_j \longrightarrow \tilde{w} \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible, } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p.x}$$

Passons à la limite dans (2.17)-(2.18). On a:

$$\psi_{w_j}(z) \geq \psi_{w_{j+1}}(z) \quad \text{d'après (2.11)}$$

$$\text{et} \quad \psi_{w_j}(x)(z(x)) \longrightarrow \psi_{\tilde{w}}(x)(z(x)) \quad \text{p.p.x.}$$

Alors d'après le théorème de convergence dominée, grâce à (2.11), on a:

$$\psi_{w_j}(z) \longrightarrow \psi_{\tilde{w}}(z)$$

De plus on a:

$$\underline{\lim} \psi_{w_j}(\theta_j) \geq \underline{\lim} \tilde{\psi}_{\tilde{w}}(\theta_j) \geq \psi_{\tilde{w}}(\tilde{\theta}) \quad (\text{car } \psi_w(.) \text{ est f.s.c.i.})$$

Donc (2.17) entraîne:

$$(2.21) \quad a(\tilde{\theta}, z - \tilde{\theta}) + \psi_{\tilde{w}}(z) - \psi_{\tilde{w}}(\tilde{\theta}) \geq (f, z - \tilde{\theta}) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

De même, avec (2.18) on obtient:

$$(2.22) \quad b(w, z-w) + \phi_{\theta}(z) - \phi_{\theta}(w) \geq (g, z-w) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

Donc (w, θ) est solution de (2.9)-(2.10).

(w, θ) est solution minimale. En effet supposons (w, θ) une autre solution. On a $\underline{w} \leq w$, et donc $T_2 \circ T_1 \underline{w} = w_1 \leq T_2 \circ T_1 w = w$ ainsi de suite, on obtient:

$$w_j \leq w \quad \forall j \quad \text{et de même} \quad \theta_j \leq \theta$$

ce qui démontre le résultat.

Pour l'existence d'une solution maximale, nous opérons de la même façon, en utilisant une formulation duale.

On définit les deux suites $\{w_j\}$ et $\{\theta_j\}$ par:

$$w_0 = \bar{w} \quad ; \quad \theta_0 = T_1 \bar{w} = \bar{\theta}$$

$$w_{j+1} = T_2 \theta_j; \quad \theta_{j+1} = T_1 w_{j+1}$$

On a alors deux suites décroissantes

$$\begin{cases} \underline{w} \leq \dots \leq w_{j+1} \leq w_j \leq \dots \leq w_1 \leq \bar{w} \\ \underline{\theta} \leq \dots \leq \theta_{j+1} \leq \theta_j \leq \dots \leq \theta_1 \leq \bar{\theta} \end{cases}$$

et comme dans le cas précédent: $\|w_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c$; $\|\theta_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c$.

On en déduit donc la convergence des suites $\{w_j\}$, $\{\theta_j\}$, au sens suivant:

$$w_j \longrightarrow \tilde{w} \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible, } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p.x.}$$

$$\theta_j \longrightarrow \tilde{\theta} \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible, } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p.x.}$$

Or, (2.17) et (2.18) peuvent s'écrire:

$$f - A\theta_j \in \partial \psi_{w_j}(\theta_j) ; \quad g - Bw_{j+1} \in \partial \phi_{\theta_j}(w_{j+1})$$

et par dualité, on a les équivalences:

$$\theta_j \in \partial \psi_{w_j}^*(f - A\theta_j) ; \quad w_{j+1} \in \partial \phi_{\theta_j}^*(g - Bw_{j+1})$$

où on note h^* la fonction polaire de h .

Soit

$$(2.23) \quad \psi_{w_j}^*(z) - \psi_{w_j}^*(f - A\theta_j) \geq (z - f, \theta_j)_{V', V} + a(\theta_j, \theta_j) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

$$(2.24) \quad \phi_{\theta_j}^*(z) - \phi_{\theta_j}^*(g - Bw_{j+1}) \geq (z - g, w_{j+1})_{V', V} + b(w_{j+1}, w_{j+1}) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

On reprend alors le même raisonnement que pour la solution minimale, en utilisant le fait que:

$$\phi_{\theta_1}^*(z) \leq \phi_{\theta_2}^*(z) \quad \text{si } \theta_1 \leq \theta_2$$

$$\psi_{w_1}^*(z) \leq \psi_{w_2}^*(z) \quad \text{si } w_1 \leq w_2$$

on a alors:

$$\overline{\lim} \psi_{w_j}^*(z) \leq \psi_{\tilde{w}}^*(z)$$

$$\underline{\lim} \psi_{w_j}^*(f - A\theta_j) \geq \psi_{\tilde{w}}^*(f - A\tilde{\theta})$$

$$\underline{\lim} a(\theta_j, \theta_j) \geq a(\tilde{\theta}, \tilde{\theta})$$

En passant à la limite dans (2.23), on obtient:

$$\psi_{\tilde{w}}^*(z) - \psi_{\tilde{w}}^*(f - A\tilde{\theta}) \geq (z - f, \tilde{\theta})_{V', V} + a(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}), \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

En opérant de même sur (2.24), on obtient:

$$\phi_{\tilde{\theta}}^*(z) - \phi_{\tilde{\theta}}^*(g - B\tilde{w}) \geq (z - g, \tilde{w})_{V^*, V} + b(\tilde{w}, \tilde{w}), \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

ce qui équivaut à :

$$a(\tilde{\theta}, z - \tilde{\theta}) + \psi_{\tilde{w}}(z) - \psi_{\tilde{w}}(\tilde{\theta}) \geq (f, z - \tilde{\theta}), \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

$$b(\tilde{w}, z - \tilde{w}) + \phi_{\tilde{\theta}}(z) - \phi_{\tilde{\theta}}(\tilde{w}) \geq (g, z - \tilde{w}), \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

Donc $(\tilde{w}, \tilde{\theta})$ est solution de (2.9)-(2.10), et, comme précédemment, on obtient que $(\tilde{w}, \tilde{\theta})$ est solution maximale.

Remarque 2.2. - Nous avons donné ici une démonstration constructive de l'existence d'une solution minimale, et d'une solution maximale. Le résultat d'existence aurait pu être obtenu directement en utilisant un résultat de G. Birkoff [2]. En effet, si on définit sur $L^2(\Omega)$ l'application $S = T_2 \circ T_1$, il existe deux éléments \underline{w} , \bar{w} tel que $\underline{w} \leq \bar{w}$; $\underline{w} \leq S\underline{w}$; $\bar{w} \geq S\bar{w}$ et donc l'ensemble des points fixes de S (solutions du problème étudié) est non vide et possède un élément minimum et un élément maximum.

Il reste à démontrer les lemmes 2.1, 2.2 et 2.3. Pour le premier on fait la démonstration des résultats pour l'I.V. (2.9), la démonstration pour l'I.V. (2.10) étant analogue.

Démonstration du lemme 2.1. - On introduit le problème régularisé :

$$(2.25) \quad a(\theta_\lambda, z) + \frac{1}{\Delta t} (H_w^\lambda(\theta_\lambda), z) = (f, z) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

avec H_w^λ approximé de Yosida de H_w .

H_w^λ est un opérateur monotone, continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et on a encore

$$a(z, z) + \frac{1}{\Delta t} (H_w^\lambda(z), z) \geq v_1 \|z\|_{H^1(\Omega)}^2 + v_2$$

(avec $v_1 > 0$).

D'après J.L. Lions [11], (2.25) admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$. On a: $\theta_\lambda \rightarrow \theta$ solution de (2.9), dans $H^1(\Omega)$ faible.

En effet, en prenant $f = \theta_\lambda$ dans (2.25) $\|\theta_\lambda\|_{H^1(\Omega)} \leq c$ (independant de λ).

On extrait une sous-suite θ_λ telle que $\theta_\lambda \rightarrow \theta^*$ dans $H^1(\Omega)$ faible.

(2.25) s'écrit:

$$(2.26) \quad f - A\theta_\lambda = \frac{1}{\Delta t} H_w^\lambda(\theta_\lambda) \in \frac{1}{\Delta t} H_w(J_\lambda^w(\theta_\lambda))$$

avec
$$J_\lambda^w = (I + \lambda H_w)^{-1}$$

Or, grâce aux propriétés des graphes associés à H_w et H_w^λ , on a d'après (2.15):

$H_w^\lambda(\theta_\lambda)$ borné dans $L^2(\Omega)$, et donc $J_\lambda^w(\theta_\lambda) \rightarrow \theta^*$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Par passage à la limite dans (2.26), on obtient (H. Brézis [4])

$$f - A\theta^* \in \frac{1}{\Delta t} H_w(\theta^*)$$

Donc θ^* est solution de (2.27); et d'après l'unicité toute la suite converge. On a de plus que $f - A\theta \in L^2(\Omega)$.

Démonstration du lemme 2.2. - Nous ne donnons également, la démonstration que pour T_1 , celle-ci étant analogue pour T_2 .

Soit w_1 et w_2 données dans $L^2(\Omega)$, avec $w_1 \leq w_2$.

On note $\theta_i = T_1 w_i$, $i=1,2$. Il existe $q_i \in H_{w_i}(\theta_i)$ tel que:

$$\frac{1}{\Delta t} (q_1 - q_2, (\theta_1 - \theta_2)^+) + a(\theta_1 - \theta_2, (\theta_1 - \theta_2)^+) = 0$$

Or, d'après (2.14) $\forall q \in H_{w_1}(\theta_1)$, $\exists p \in H_{w_2}(\theta_1)$ tel que $p \leq q$. Soit donc $p_1 \in H_{w_2}(\theta_1)$ tel que $p_1 \leq q_1$.

On a

$$\frac{1}{\Delta t} (p_1 - q_2, (\theta_1 - \theta_2)^+) + a(\theta_1 - \theta_2, (\theta_1 - \theta_2)^+) \leq 0.$$

D'après 2.12, on obtient

$$||(\theta_1 - \theta_2)^+||_{H^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \text{et donc} \quad \theta_1 \leq \theta_2.$$

Démonstration du lemme 2.3. - On définit \underline{w} de la façon suivante:

Soit \bar{G} l'opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ défini par:

$$\bar{G}(z)(x) = \bar{g}(z(x))$$

alors,

$$(2.27) \quad (\bar{G}(\underline{w}), z) + b(\underline{w}, z) = (g, z) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

Si $w = T_2 \theta$, θ arbitraire dans $L^2(\Omega)$, il existe $v \in G_\theta(w)$

$$(2.28) \quad (v, z) + b(w, z) = (g, z) \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

En retranchant (2.28) à (2.27) et en prenant $z = (\underline{w} - w)^+$, on obtient:

$$(\bar{G}(\underline{w}) - v, (\underline{w} - w)^+) + b(\underline{w} - w, (\underline{w} - w)^+) = 0$$

Or d'après (H4), on a $\forall \bar{v} \in G_{\theta}(\underline{w}), \quad \bar{v} \leq \bar{G}(\bar{w})$.

Donc on obtient:

$$(\bar{v} - v, (\underline{w} - w)^+) + b(\underline{w} - w)^+, (\underline{w} - w)^+ \leq 0$$

D'après (2.12) on en déduit:

$$||(\underline{w} - w)^+||_{H^1(\Omega)}^2 \leq 0 \quad \text{et donc } \underline{w} \leq w. \quad \text{p.p.}$$

De même on définit \bar{w} de la manière suivante:

Si \underline{G} est l'opérateur de $L^2(\Omega)$ défini par:

$$\underline{G}(z)(x) = \underline{g}(z(x)), \text{ alors } \bar{w} \text{ est solution de}$$

$$(\underline{G}(w), z) + b(\bar{w}, z) = g(z) \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

De la même façon que précédemment, on a alors

$$\bar{w} \geq w \quad \text{p.p.}$$

III.- Méthode numérique

Au pas de temps $(n+1)\Delta t$, nous avons à résoudre le système.

Trouver $(\theta^{n+1}, w^{n+1}) \in (H^1(\Omega))^2$ tel que:

$$(3.1) \quad \frac{u^{n+1}}{\Delta t} + A^n \theta^{n+1} = h^{n+1} + \frac{u^n}{\Delta t}; \quad u^{n+1} \in H_{w^{n+1}}(\theta^{n+1})$$

$$(3.2) \quad \frac{v^{n+1}}{\Delta t} + B^n w^{n+1} = \frac{v^n}{\Delta t}; \quad v^{n+1} \in G_{\theta^{n+1}}(w^{n+1})$$

(u^n, v^n) étant donnés.

Nous utilisons numériquement la même méthode que celle utilisée pour démontrer l'existence au paragraphe précédent. Plus précisément, nous avons les itérations suivantes, par exemple pour calculer une solution minimale (On adapte immédiatement la méthode, pour une solution maximale):

1) Calcul de \underline{w}^{n+1} solution de

$$\left(\frac{\sigma_2 \underline{w}^{n+1}}{\Delta t}, z \right) + b^n(\underline{w}^{n+1}, z) = \left(\frac{v^n}{\Delta t}, z \right) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

2) $j=0$, $w_0^{n+1} = \underline{w}^{n+1}$

3) Calcul de θ_j^{n+1} , solution de:

$$(3.3) \quad a^n(\theta_j^{n+1}, z - \theta_j^{n+1}) + \psi_{w_j^{n+1}}(z) - \psi_{w_j^{n+1}}(\theta_j^{n+1}) \geq \left(h^n + \frac{u^n}{\Delta t}, z - \theta_j^{n+1} \right) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

qui correspond à (3.1).

4) Calcul de w_{j+1}^{n+1} , solution de:

$$(3.4) \quad b^n(w_{j+1}^{n+1}, z - w_{j+1}^{n+1}) + \phi_{\theta_j^{n+1}}(z) - \phi_{\theta_j^{n+1}}(w_{j+1}^{n+1}) \geq \left(\frac{v^n}{\Delta t}, z - w_{j+1}^{n+1} \right) \quad \forall z \in H^1(\Omega)$$

qui correspond à (3.2)

5) Test de convergence

Si vérifié \longrightarrow FIN

Sinon, $j=j+1$, et retour en 3).

D'après le paragraphe précédent, l'algorithme ci-dessus converge vers la solution minimale du problème.

Pour résoudre les inéquations variationnelles (3.3)-(3.4), on opère comme dans A.Bermúdez-C.Moreno [1], C.Saguez [13], c'est-à dire, par exemple pour (3.3):

On introduit un paramètre $\omega > 0$ (ω peut-être différent pour (3.3) et (3.4)), tel que (3.3) s'écrit:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{y_j^{n+1}}{\Delta t} + A^n \theta_j^{n+1} + \frac{\omega}{\Delta t} \theta_j^{n+1} = h^{n+1} + \frac{u^n}{\Delta t} \\ (3.6) \quad \begin{cases} y_j^{n+1} \in H_{w_j^{n+1}}^\omega(\theta_j^{n+1}) = H_{w_j^{n+1}}(\theta_j^{n+1}) - \omega \theta_j^{n+1} \end{cases} \end{cases}$$

Si on note $H_{w_j^{n+1}}^{\omega, \lambda}$ l'approximé de Yosida de $H_{w_j^{n+1}}^\omega$, on a les itérations:

1) Calcul de $\theta_j^{n+1,1}$ solution de l'équation:

$$A^n \theta_j^{n+1,1} + \frac{\omega}{\Delta t} \theta_j^{n+1,1} = h^{n+1} + \frac{u^n}{\Delta t} - \frac{y_j^{n+1,1}}{\Delta t}$$

2) $y_j^{n+1,1+1}$ donnée par:

$$y_j^{n+1,1+1} = C_r H_{w_j^{n+1}}^{\omega, \lambda}(\theta_j^{n+1,1} + \lambda y_j^{n+1,1}) + (1 - C_r) y_j^{n+1,1}$$

Cet algorithme converge pour λ vérifiant (A.Bermúdez-C.Moreno [1])

$$2\omega > \frac{1}{\lambda} > (\omega - m_1)^+$$

et $C_r \in (0, 1]$

Remarque 3.1. - A partir de cet algorithme, des nombreuses variantes peuvent être envisagées comme dans A.Bermúdez-C.Moreno [1].

Remarque 3.2 - Au niveau de l'approximation en espace des équations (3.3) et (3.4), si on utilise une méthode de Galerkin pour une base $\{e_i\}_{i=1, \dots, N_x}$, avec $\sum_{i=1}^{N_x} e_i(x) = 1$ (par exemple éléments finis P_1), on obtient la conservation de l'enthalpie et de la masse. Ainsi, par exemple, sur (3.4) on a l'approximation:

$$\left(\sum_{i=1}^{N_x} v_i^{n+1} e_i, e_j \right) + \Delta t b_n \left(\sum_{i=1}^{N_x} w_i^{n+1} e_i, e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{N_x} v_i^n e_i, e_j \right)$$

ce qui donne, puisque $\sum_{j=1}^{N_x} e_j(x) = 1$, en sommant sur j l'équation ci-dessus:

$$\sum_{i=1}^{N_x} v_i^{n+1} \int_{\Omega} e_i(x) dx = \sum_{i=1}^{N_x} v_i^n \int_{\Omega} e_i(x) dx$$

De même, dans le cas d'une approximation par différences finies, avec un schéma à 3 points classique, on obtient encore conservation de l'enthalpie et conservation de la masse.

III.2.- Résultats Numériques.

Nous présentons des résultats numériques en dimension 1 et pour le problème (1.1)-(1.9).

i) Dimension 1

Nous avons considéré les données suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega =]0, 1[\\ \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1 \\ \rho = 1, \quad k = 1 \\ L = 1, \quad \sigma_1 = -2, \quad \sigma_2 = -1 \end{array} \right.$$

Conditions aux bords

$$q(t) = -1.$$

Température de solidification du corps pur:

$$\theta_d = 0.$$

Conditions initiales:

$$\theta_0(x) = 0.5 \quad c_0(x) = 1$$

Le pas de temps est $\Delta t = 0,1$ et nous avons utilisé comme discrétisation en espace un schéma aux différences finies, le pas étant:

$$\Delta x = 1/20.$$

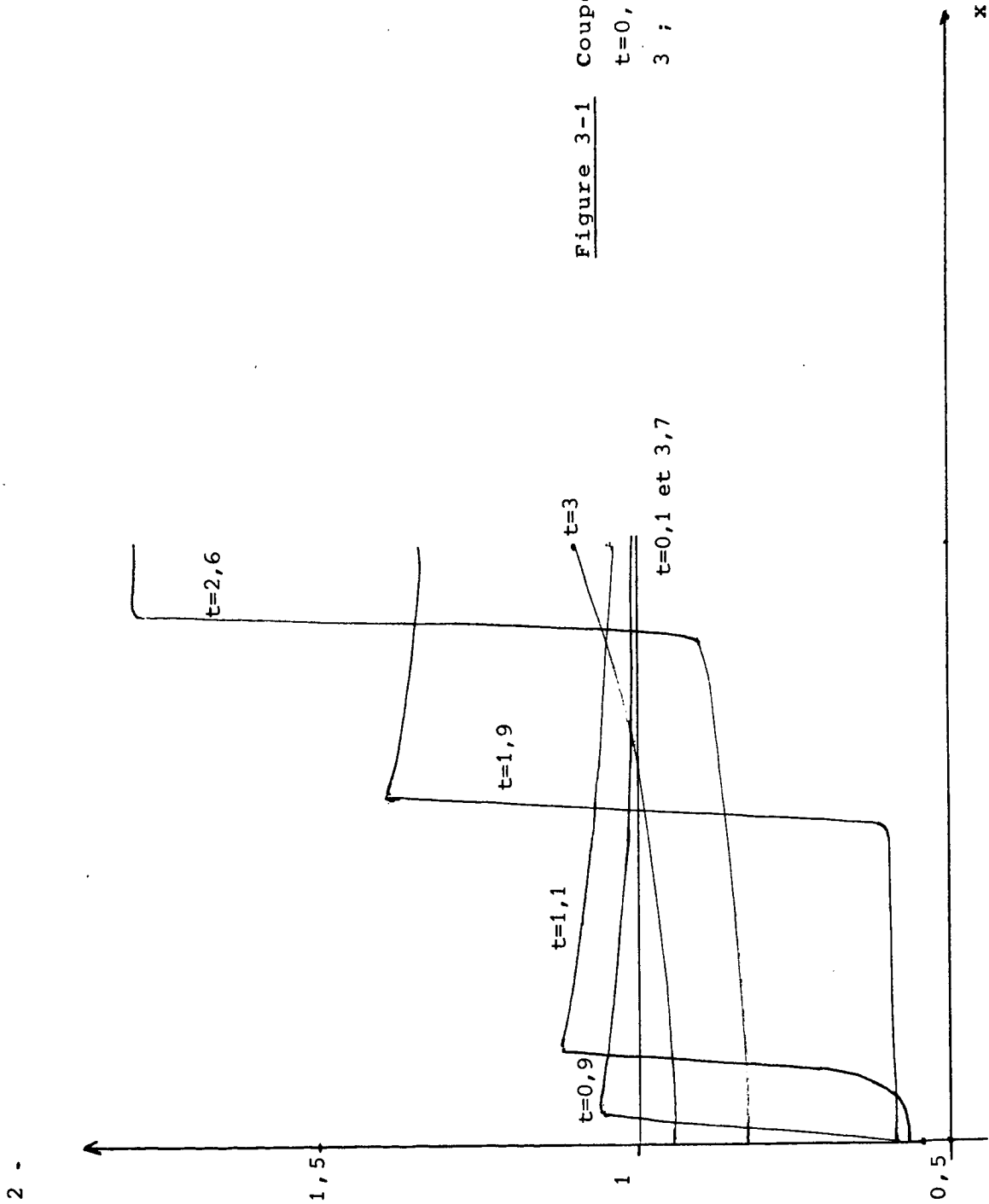
Dans le tableau ci-dessous nous indiquons la valeur moyenne du nombre d'itérations (en j) par pas de temps sur les 20 premiers pas de temps, avec $\phi = \frac{1}{2\lambda}$ et le test d'arrêt

$$\max_{1 \leq i \leq N_x} \frac{|w_{j+1,i} - w_{j,i}|}{|w_{j+1,i}|} < 10^{-4}.$$

$\lambda \backslash C_r$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.14	7	5	5	5	5
0.16	10	5	4	3	3
0.18	14	6	5	4	3
0.20	17	6	5	5	4
0.40	44	19	9	6	5
0.60	64	31	18	7	6
0.80	83	44	27	18	7

Les résultats pour $\lambda = 0,16$; $C_r = 1$ sont présentés figures 3-1, 3-2, 3-3, 3-4.

Figure 3-1 Coupe de concentration aux instant
 $t=0,1$; $0,9$; $1,1$; $1,9$; $2,6$;
 3 ; $3,7$.



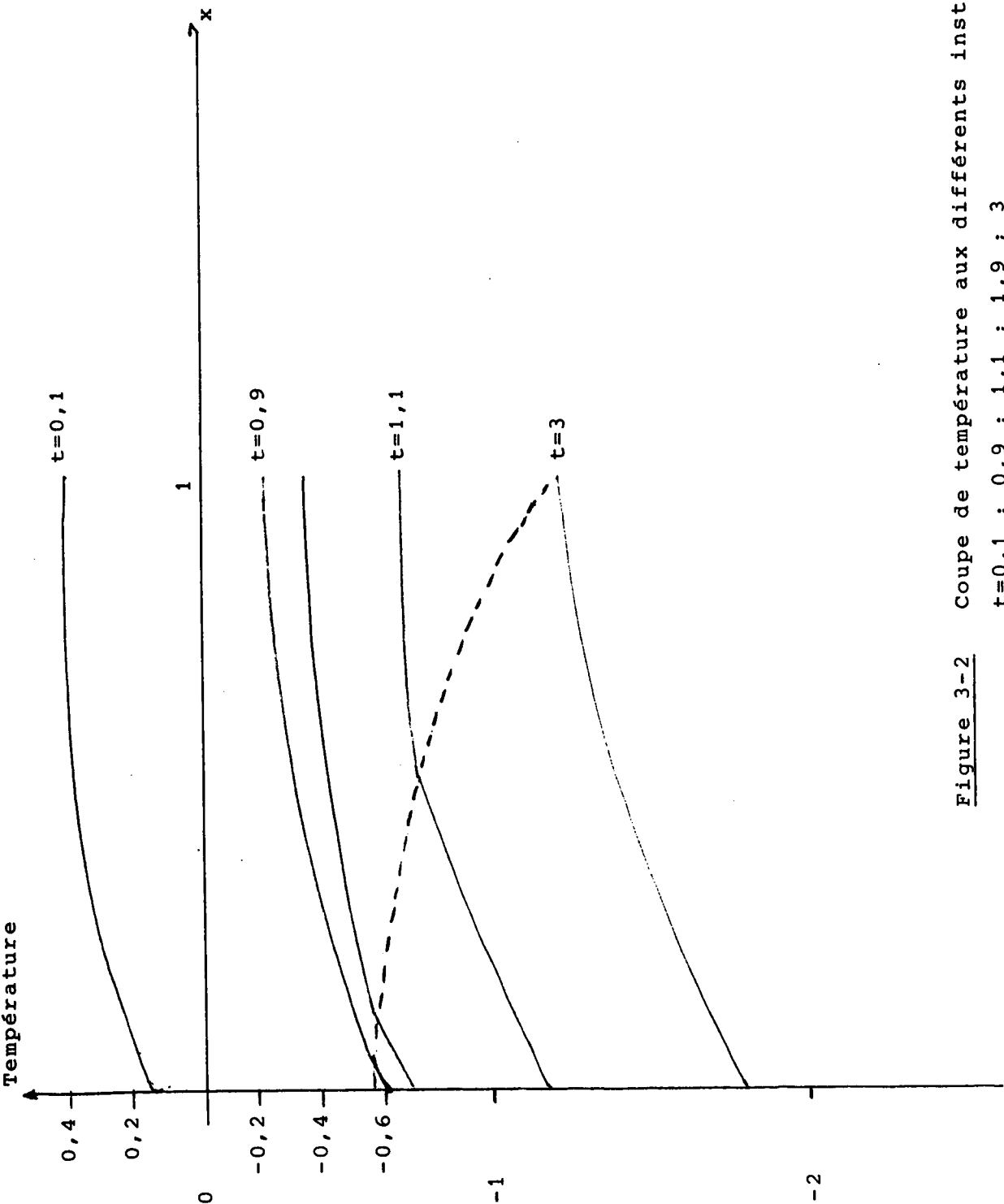
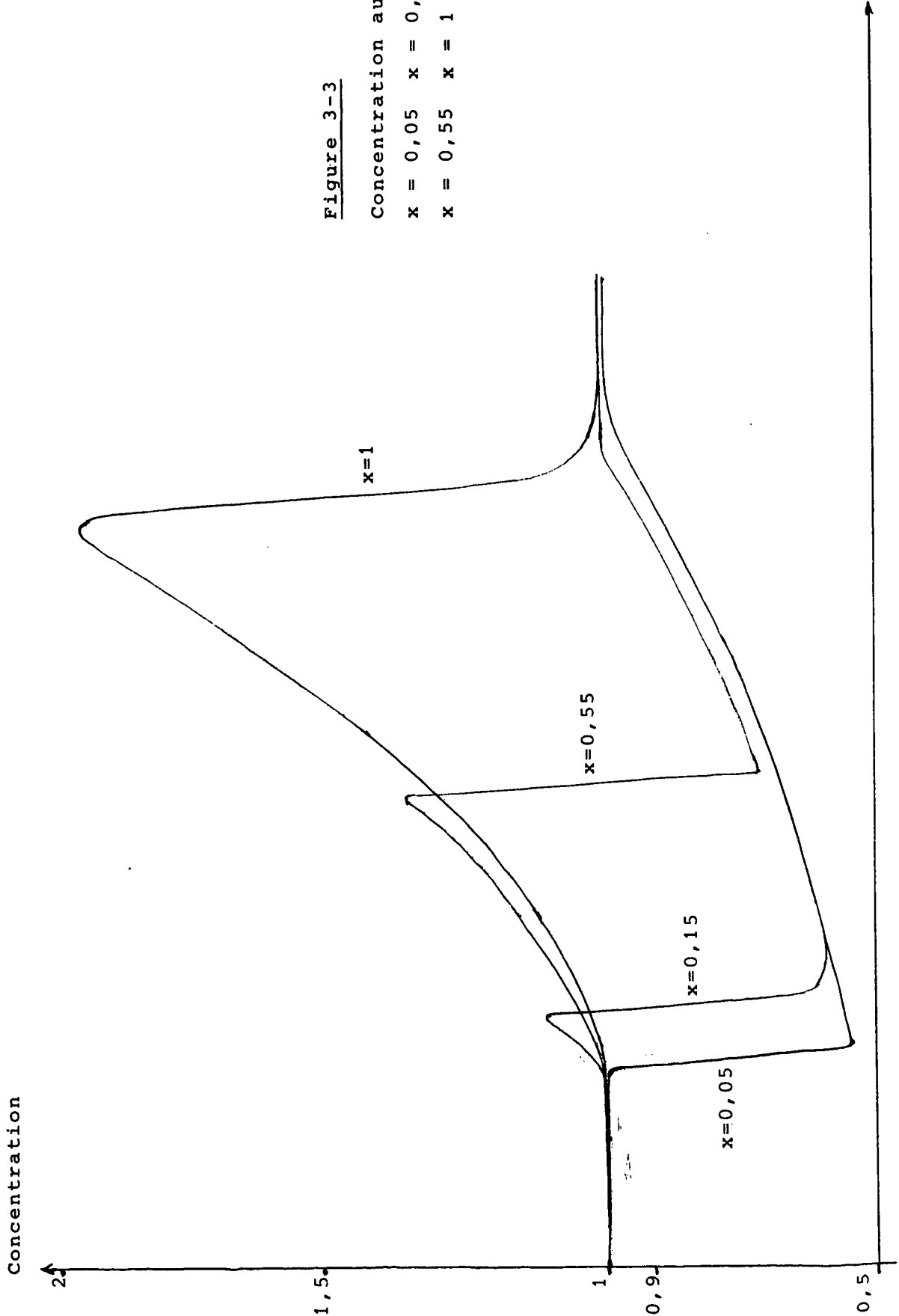


Figure 3-2 Coupe de température aux différents instants
 $t=0,1$; $0,9$; $1,1$; $1,9$; 3

Figure 3-3
Concentration aux points
 $x = 0,05$ $x = 0,15$
 $x = 0,55$ $x = 1$



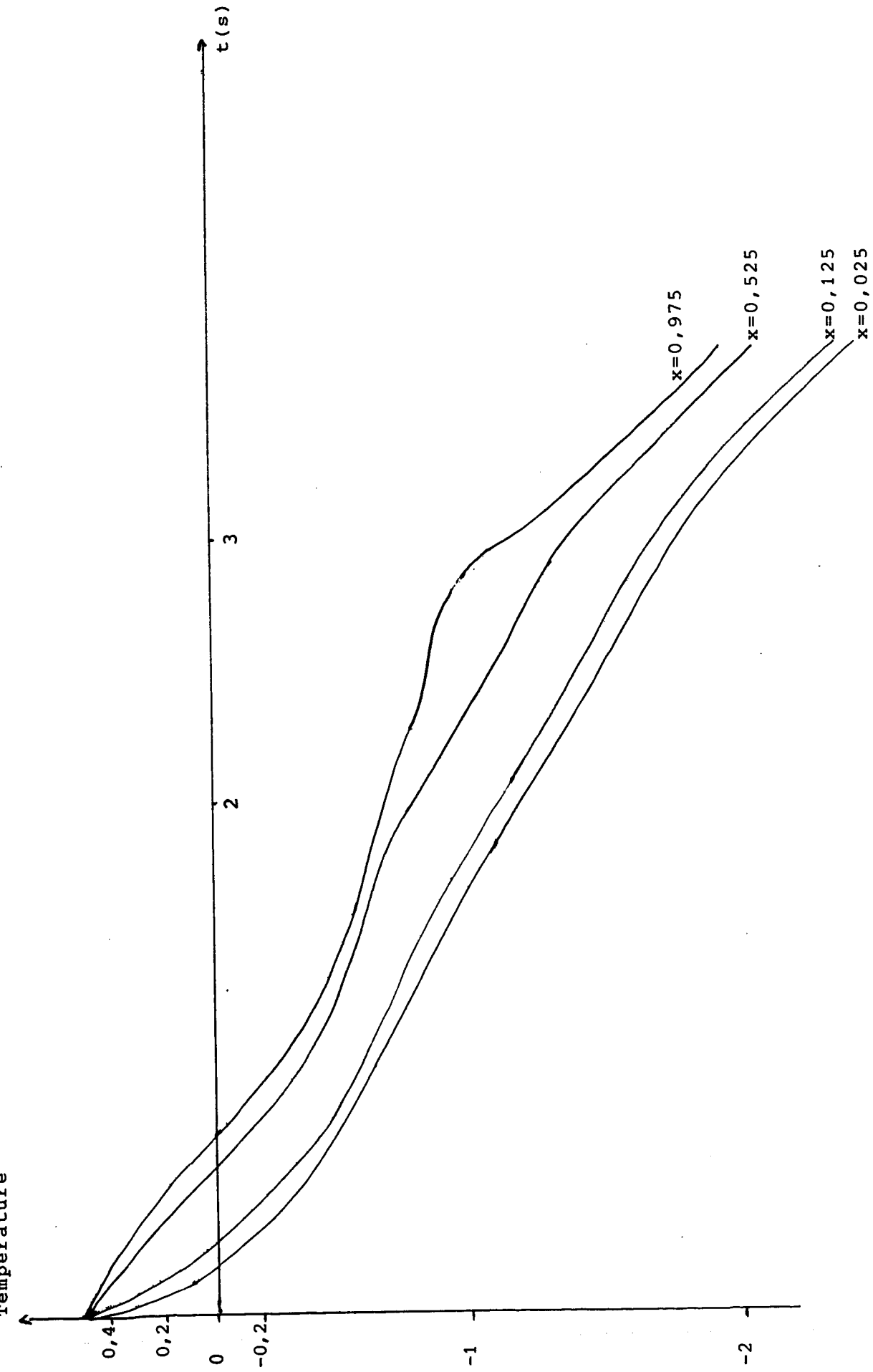


Figure 3-4 Evolution de la température aux points
 $x=0,025$ $x=0,125$ $x=0,525$ $x=0,975$

ii) Dimension 2

Nous avons considéré deux classes de données. Le système a été approché chaque fois par éléments finis P_1 , le domaine d'intégration étant un carré de côté a .

a) Nous avons considéré les données:

- Domaine d'intégration

$a = 1$ cm, domaine discrétisé en 200 éléments triangulaires réguliers.

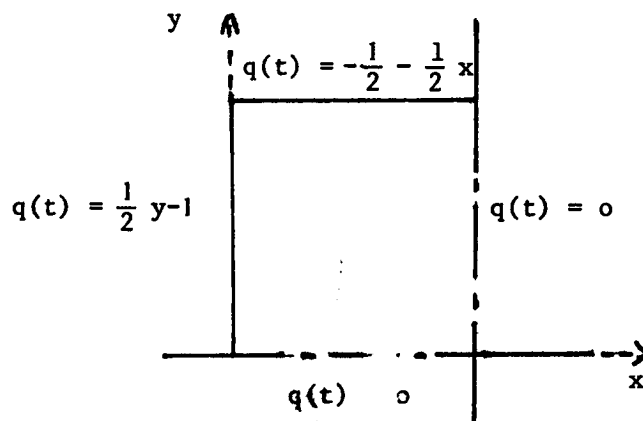
- Le flux thermique $q(t)$ aux bords est donné sur la figure ci-dessous (fig. 3-5).

Figure 3-

- Données physiques (identiques à la dimension 1)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 1$$

$$\rho = 1 ; k = 1$$

$$L = 1 ; \sigma_1 = -2 ; \sigma_2 = -1$$

Température de solidification du corps pur = 0.

Conditions initiales :

$$\theta_0(x) = 0,5 ; c_0(x) = 1$$

- Paramètres de l'algorithme

Pas de temps $\Delta t = 0,1$

$c_r = 1$; $\lambda = 0,16$ pour les deux I.V.

- Même test d'arrêt qu'en dimension 1 avec $\epsilon = 10^{-3}$.

Les résultats sont présentés figures 3-6 à 3-11.

Les courbes d'équitempérature varient de -2°C à $0,5^{\circ}\text{C}$ avec un pas de $0,1^{\circ}\text{C}$ et les courbes d'équiconcentration de $0,5$ à $2,20$ avec un pas de $0,05$.

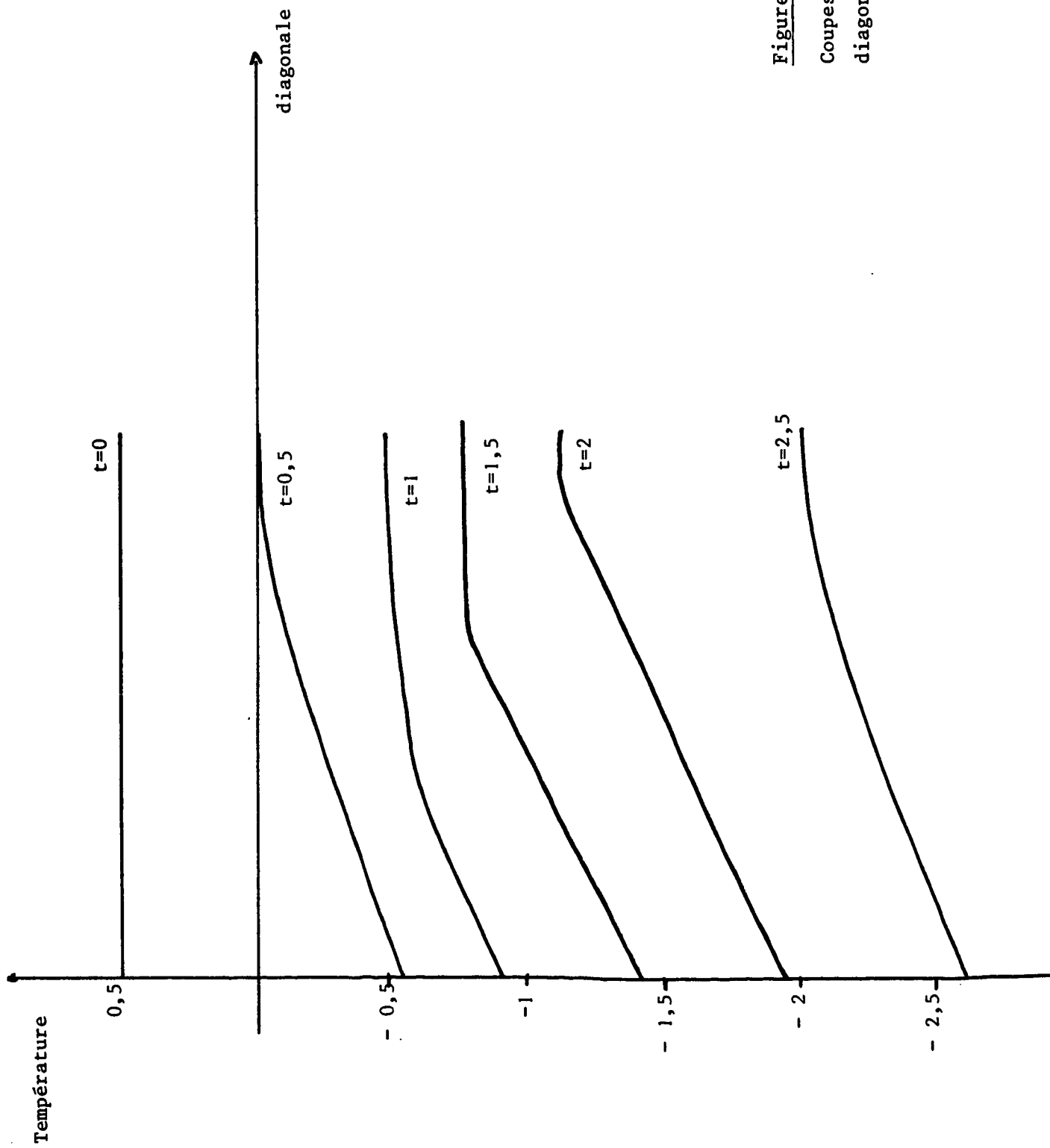


Figure 3-6

Coupes de températures le long de la diagonale à différents instants

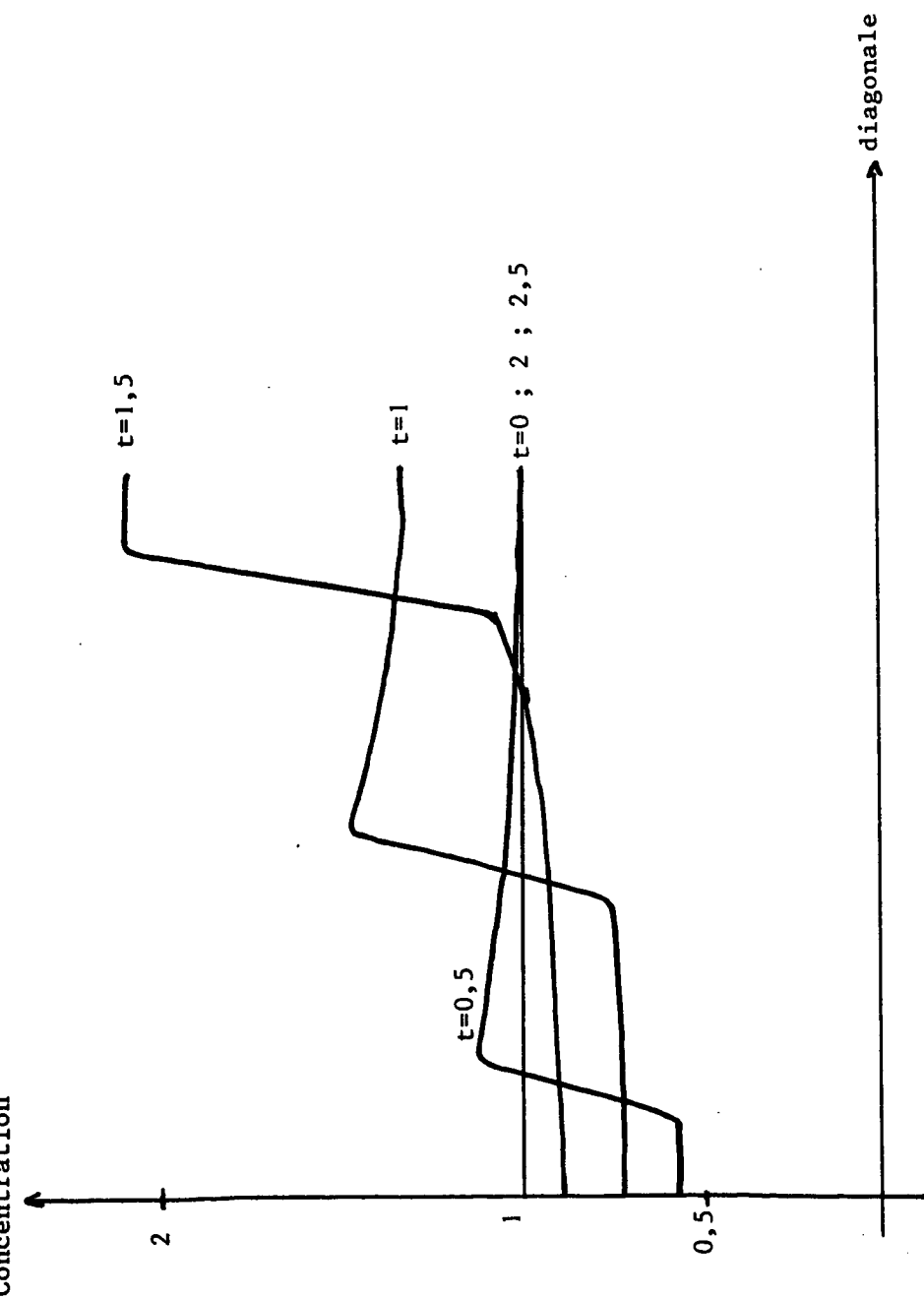
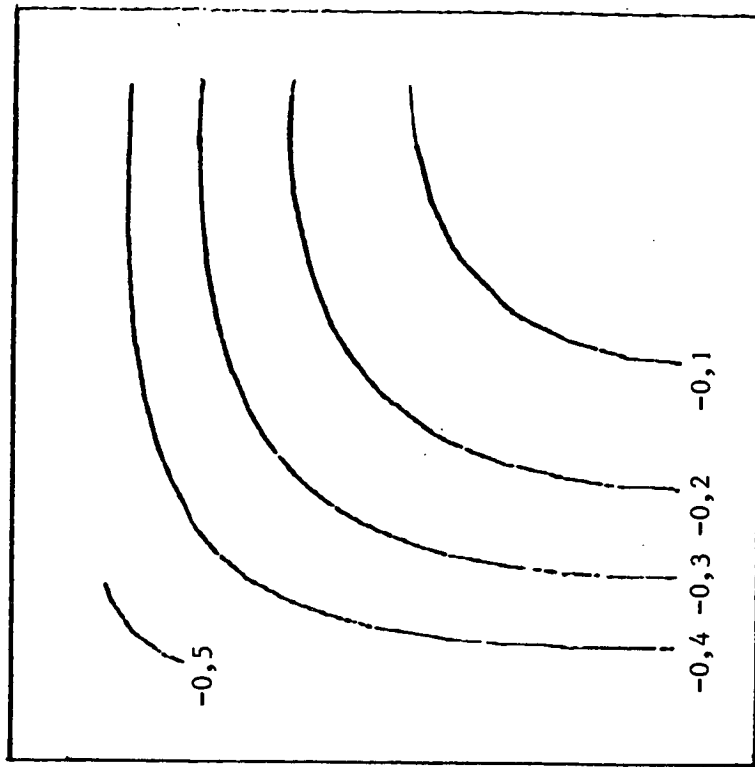


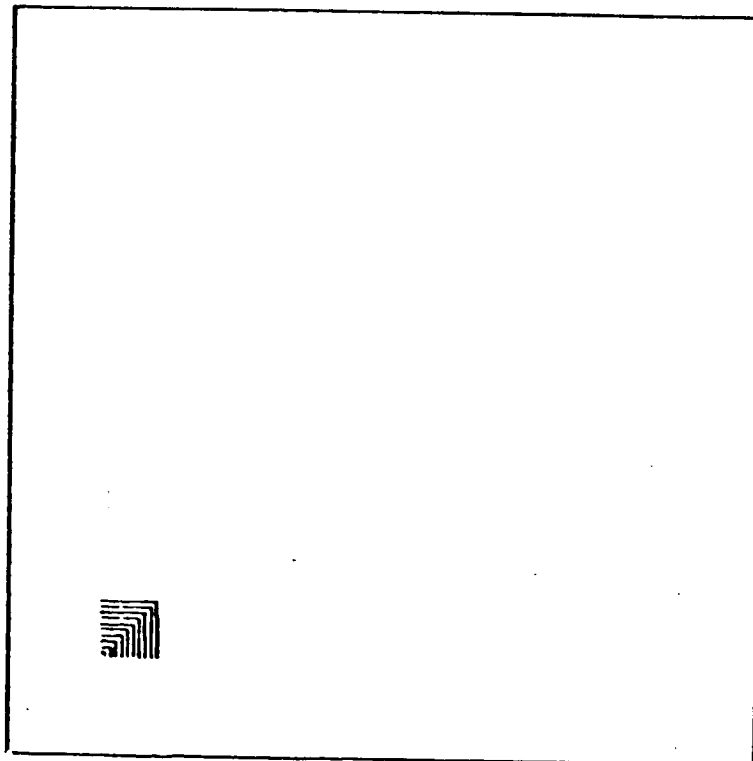
Figure 3-7 Coupes de concentration le long de la diagonale à différents instants



Courbes d'équitémpérature

Figure 3-8

à l'instant $t=0,5$



Courbes d'équiconcentration
(Les courbes varient de 0,55 à 1)

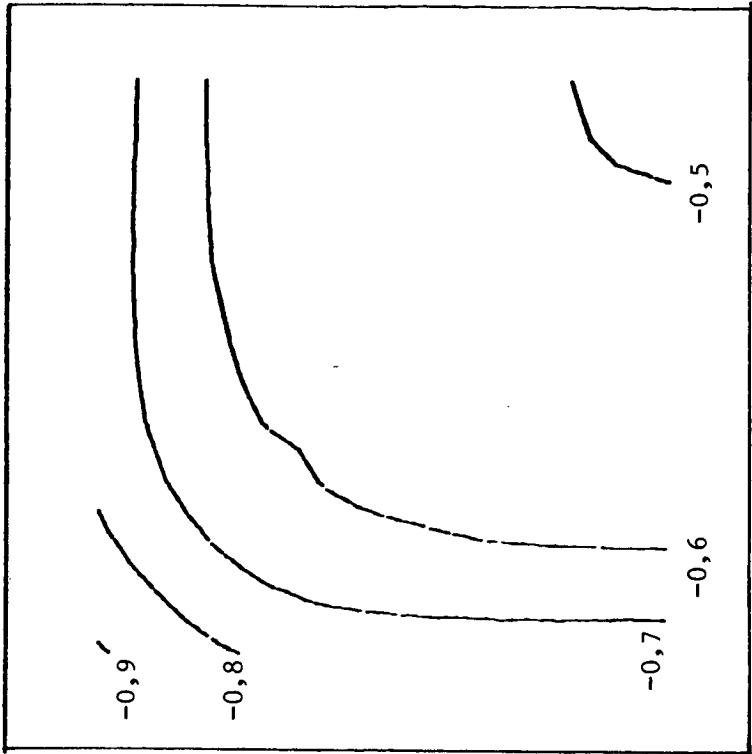
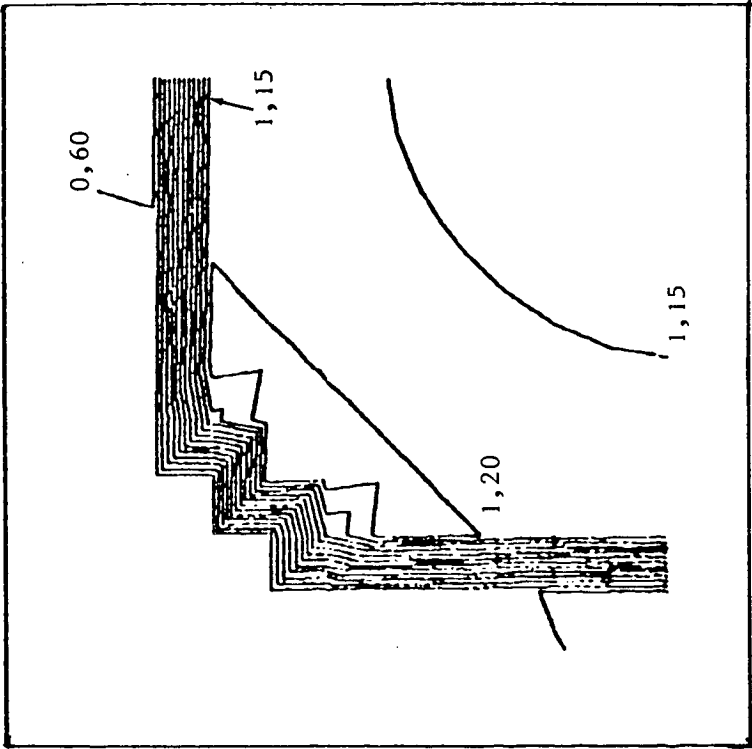


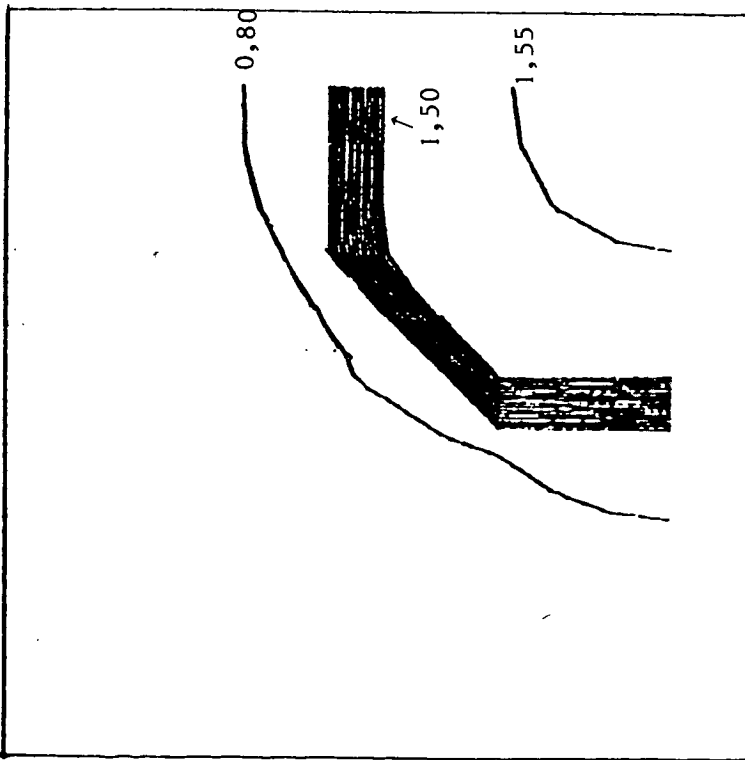
Figure 3-9

Courbes d'équitempérature

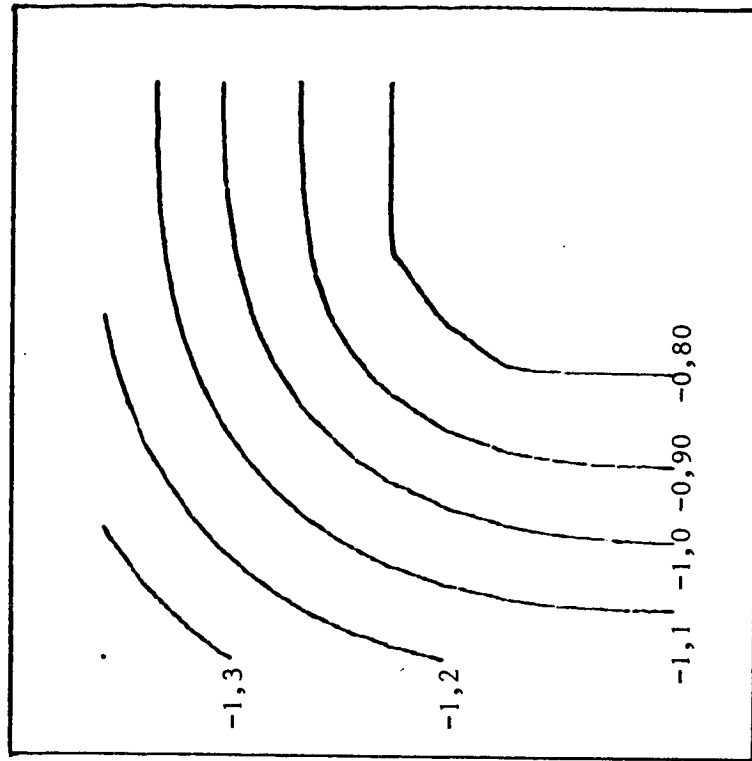
à l'instant $t=1$



Courbes d'équiconcentration



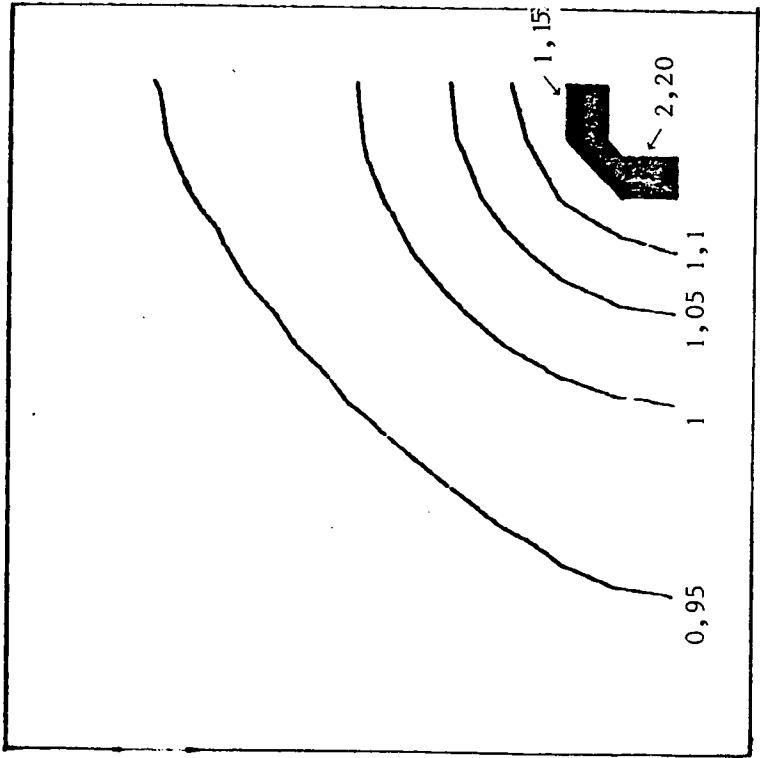
Courbes d'équiconcentration



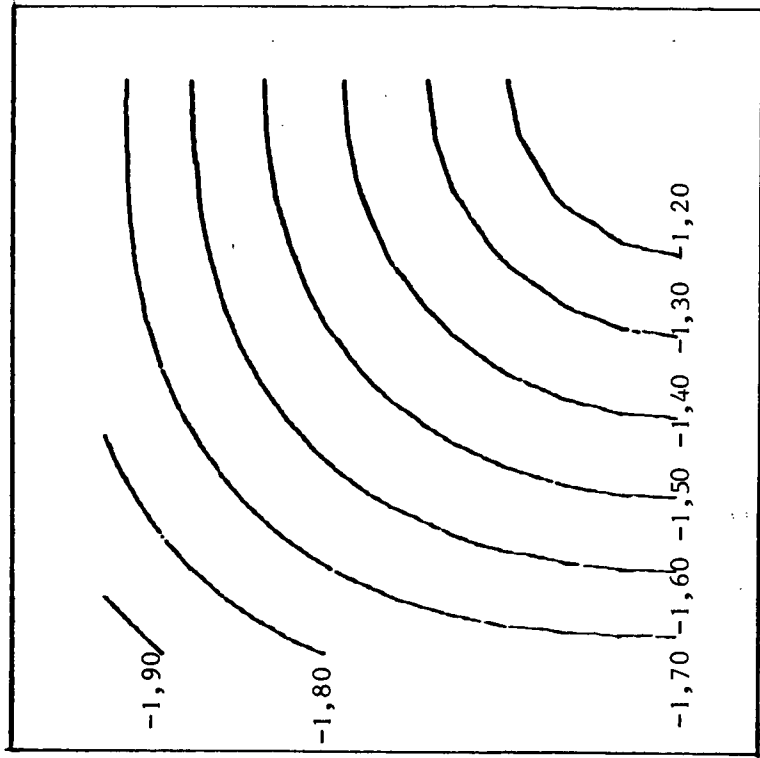
Courbes d'équitempérature

Figure 3-10

à l'instant $t=1,5$



Courbes d'équiconcentration



Courbes d'équitémpérature

Figure 3-11

à l'instant $t=2$

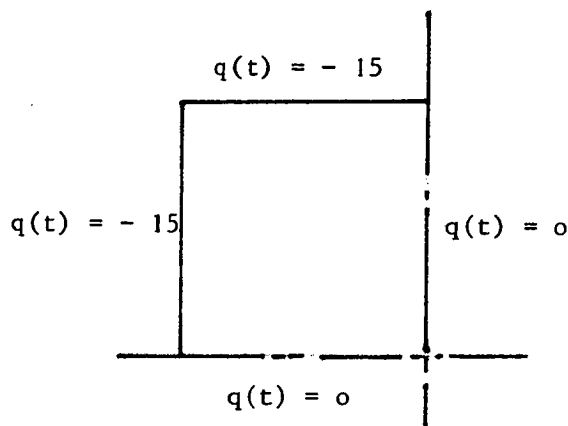
β) Cas de l'alliage Fe-C.

Nous avons considéré les données physiques associées à l'alliage Fe-C en coulée continue. (H.K. TASKE, A. GRILL, K. MIYAZAWA, K. SCHWERDTFEGER [15]).

- Domaine d'intégration

$a = 10$ cm, domaine discrétisé en 200 éléments finis triangulaires réguliers.

- Flux thermiques aux bords



- Données physiques

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,816$$

$$\beta_1 = 0,0001; \beta_2 = 0,0000001$$

$$\rho = 7,4; k = 0,166$$

$$L = 65,28; \sigma_1 = -0,0128; \sigma_2 = -0,00448$$

Température de solidification du corps pur (Fe) = 1536°C .

Conditions initiales:

$$\theta_0(x) = 1536^\circ\text{C}; c_0(x) = 0,6.$$

- Paramètres de l'algorithme

Pas de temps $\Delta t = 10 \text{ s}$

Pour l'I.V. associé à la température

$$\lambda = 0,05 \quad ; \quad c_r = 0,5$$

Pour l'I.V. associé à la concentration

$$\lambda = 10 \quad ; \quad c_r = 0,5$$

- Test d'arrêt, idem cas α).

Les résultats sont présentés figures 3-12 à 3-16.

Les courbes d'équitempérature varient de 1536°C à 286°C par pas de 50°C et les courbes d'équiconcentration de $0,59$ à $0,61$ par pas de $0,001$.

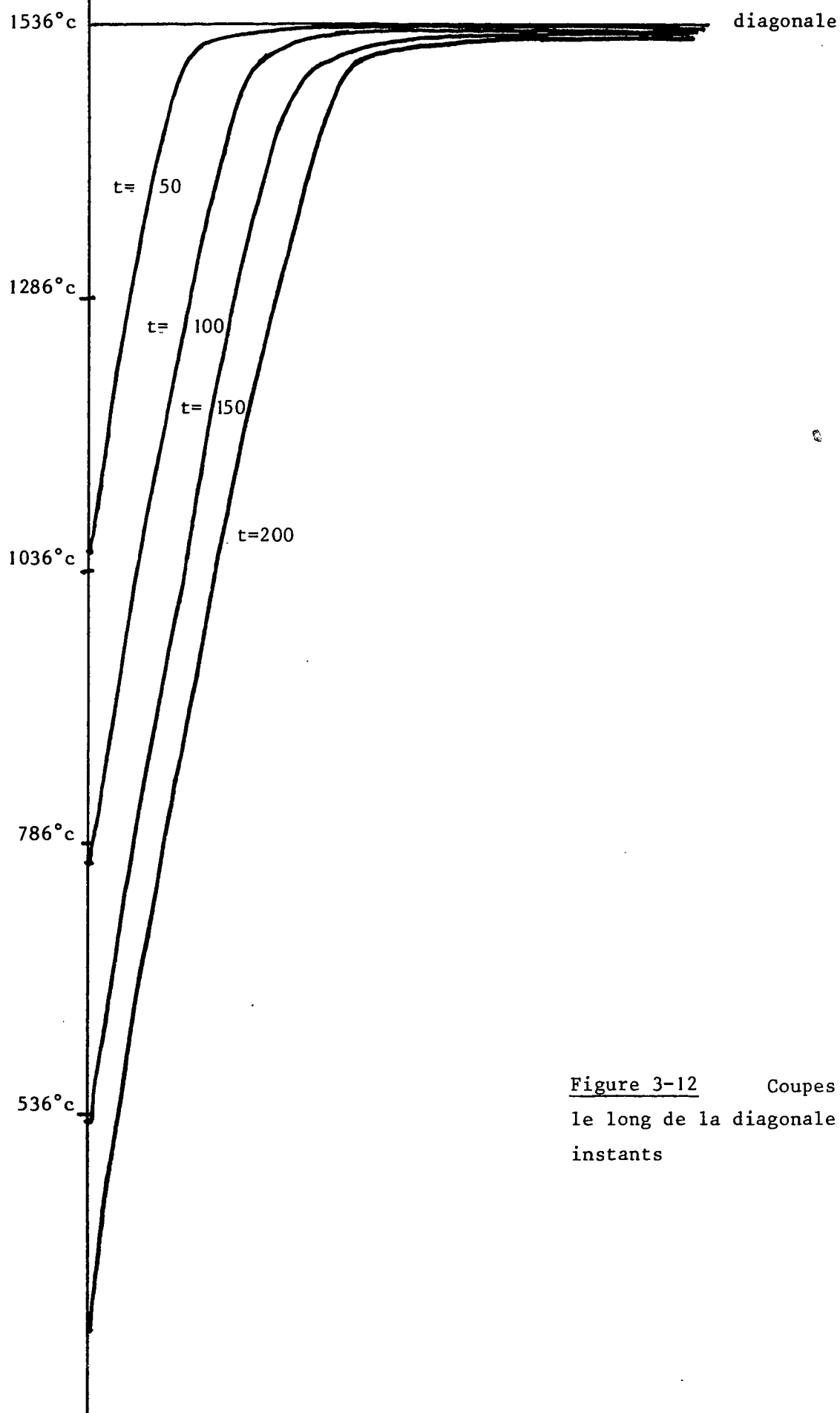
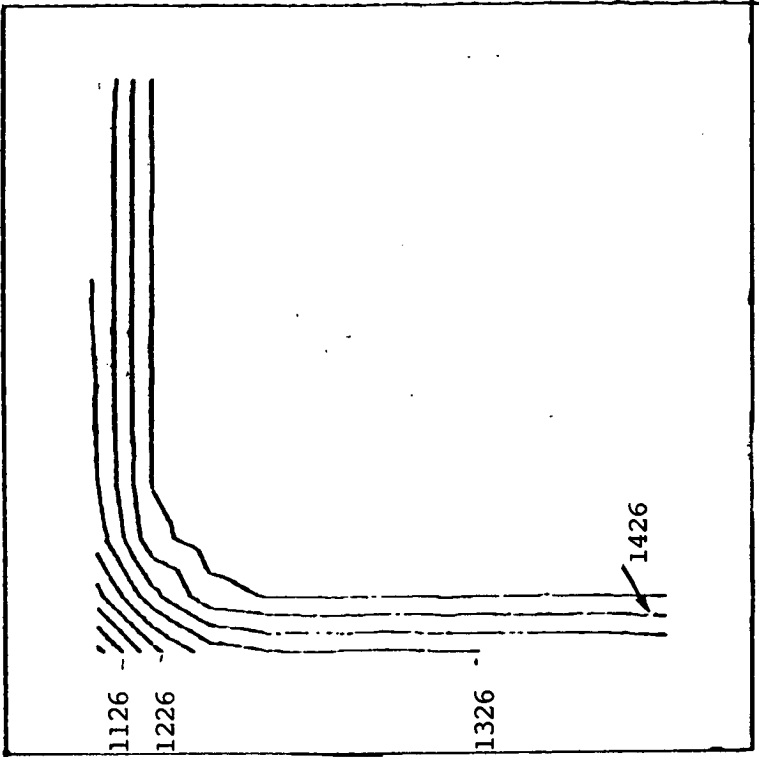
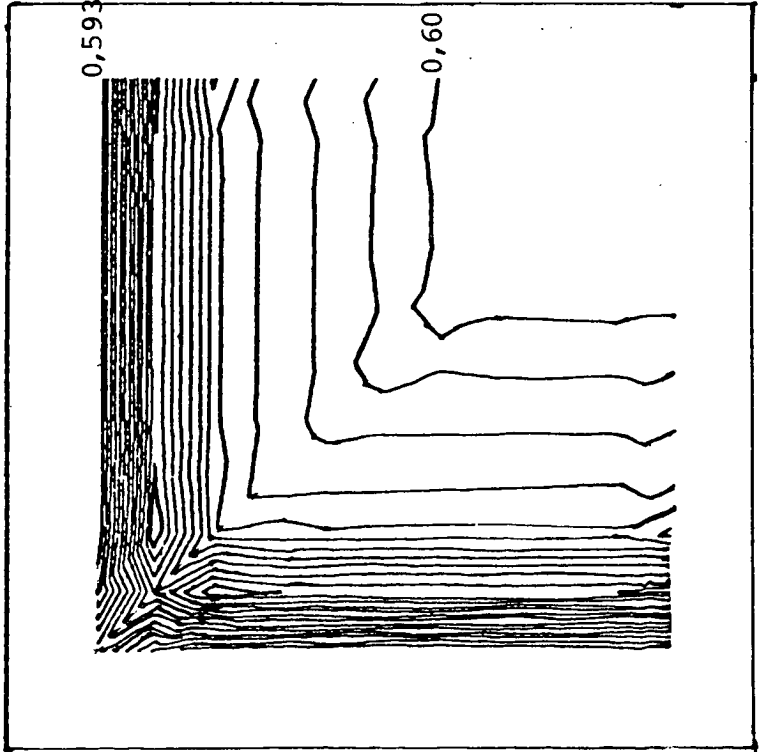


Figure 3-12 Coupes de température
le long de la diagonale à différents
instants

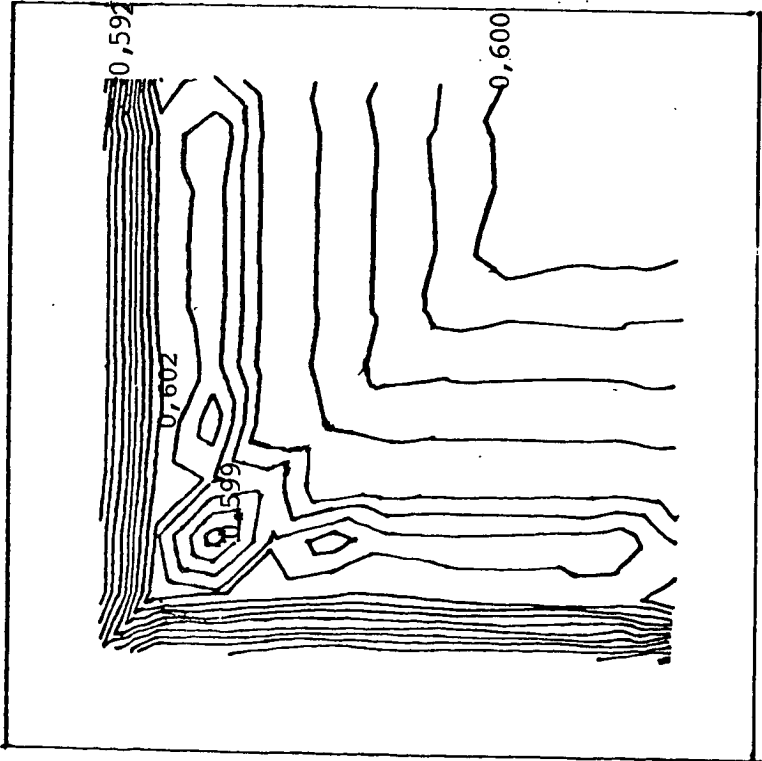


Courbes d'équitempérature

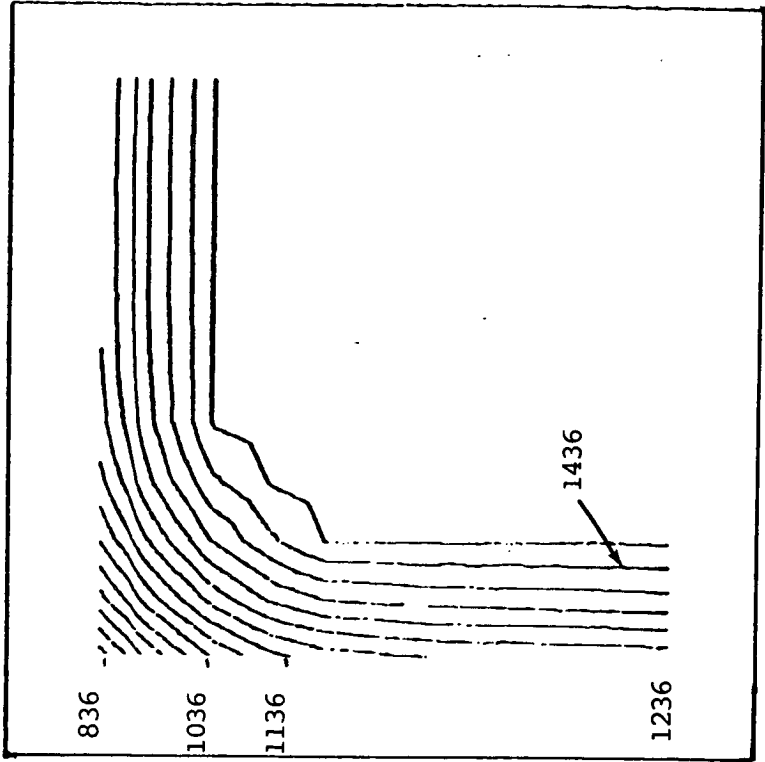
à l'instant $t=50$ s



Courbes d'équiconcentration



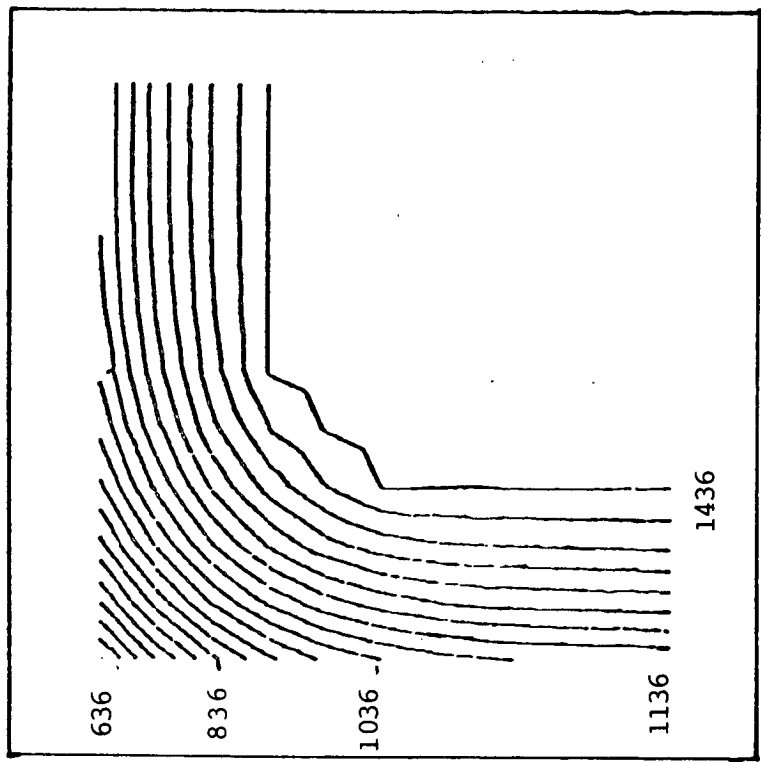
Courbes d'équiconcentration



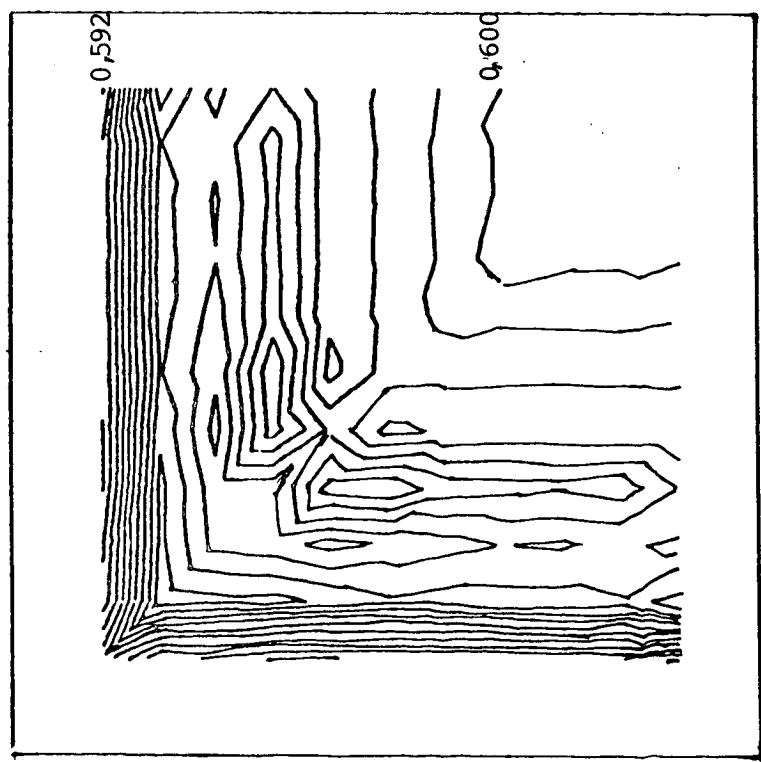
Courbes d'équitempérature

Figure 3-14

à l'instant $t=100$ s



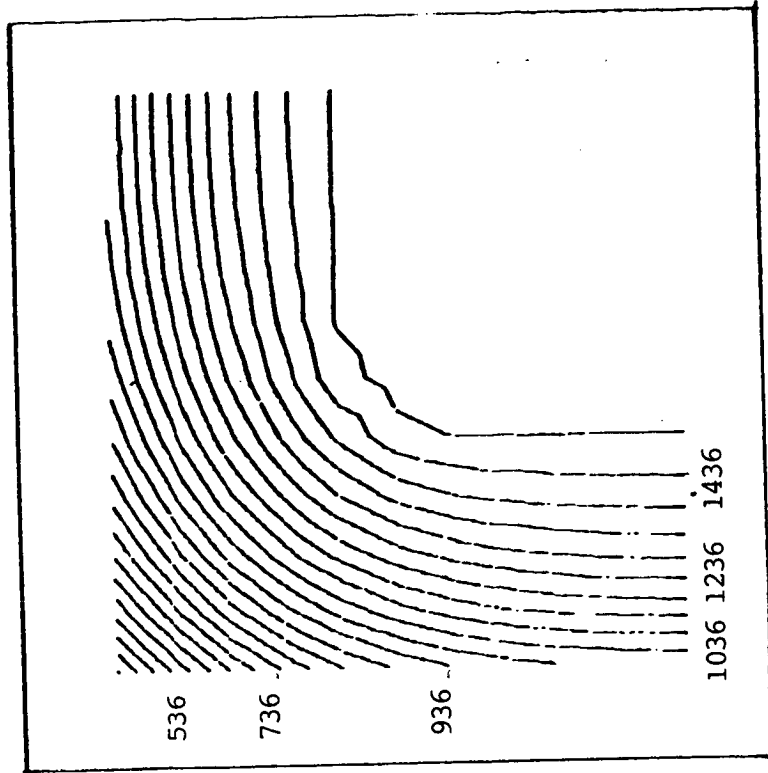
Courbes d'équitémpérature



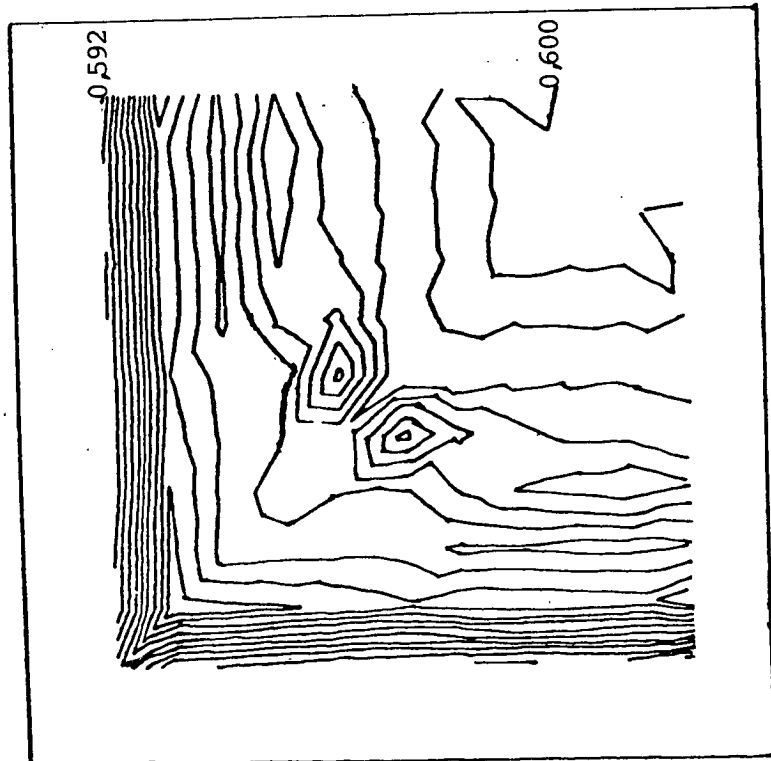
Courbes d'équiconcentration

Figure 3-15

à l'instant $t=150$ s



Courbes d'équitempérature



Courbes d'équiconcentration

Figure 3-16

à l'instant $t=200$ s

BIBLIOGRAPHIE.-

- 1 A. BERMUDEZ et C. MORENO. Duality methods for solving variational inequalities. Comp. and Math. with Appl. Vol. 7 pp. 43-58 (1981).
- 2 A. BERMUDEZ et C. SAGUEZ. Numerical method for a model of an alloy solidification. (To appear in proceedings of Free Boundary Problems : theory and application - an interdisciplinary symposium - Montecatini Juin 1981).
- 3 G. BIRKHOFF. Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXV, (1948)
- 4 H. BREZIS. Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de concentrations dans les espaces de Hilbert. North Holland. (1977).
- 5 B. CHALMERS. Principales of Solidification. John Wiley (1964).
- 6 A.B. CROWLEY et J.R. OCKENDON. On the numerical solution of an alloy solidification problem. Int. J. Heat Mass. Transfer. Vol. 22 pp 941-947 (1979).
- 7 J.D.P. DONNELLY. A model for non-equilibrium thermodynamic processes involving phase changes. J. Inst. Math. Appl. 24 pp. 425-438 (1979).
- 8 I. EKELAND et R. TEMAM. Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod (1974).
- 9 G.J. FIX. Numerical methods for alloy solidification problems in Moving Boundary Problems D. WILSON, A.D. SALOMON and P.S. BOGGS Ed. Academic Press (1978).
- 10 M. FLEMINGS. Solidification Processing. Mac Graw Hill (1974).

- 11 J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod (1969).
- 12 J.L. LIONS. Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal. Les presses de l'Université de Montréal (1976).
- 13 C. SAGUEZ. Thèse d'Etat. Université Technologique de Compiègne. (1980).
- 14 L. TARTAR. Inéquations quasi-variationnelles abstraites. C.R. Ac. Sc. Paris 278 pp.1193-1196 (1974).
- 15 K.H. TASKE, A. GRILL, K. MIYAZAWA, K. SCHWERTFEGGER. Macrosegregation in strand cast steel : computation of concentration profiles with a diffusion model (Max Planck Institut paper 1407-1981).

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

